

8В, спецкурс

Экзамен 4 июня. Программа.

Везде нужны определения, формулировки, доказательства. Вопрос в билете \neq пункт программы.

- 1** Принцип математической индукции. Принцип наименьшего элемента и его применение к решению задач.
- 2** Делимость нацело, деление с остатком, Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное. $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b) = \text{НОД}(r, b)$, где r – остаток от деления a на b .
- 3** Лемма Евклида. Основная теорема арифметики. Количество делителей числа.
- 4** Определение сравнимости по модулю. Числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на m . Сравнения можно складывать, умножать и возводить в степень.
- 5** Сокращение сравнений (два утверждения). Деление по модулю. Если $(a, m) = 1$, то можно делить на a по модулю m .
- 6** Теорема Вильсона.
- 7** Китайская теорема об остатках (для произвольного числа сравнений).
- 8** Функция Эйлера. Определение и формула. Тождество Гаусса.
- 9** Малая теорема Ферма. Теорема Эйлера.
- 10** Множества, их элементы, пустое множество. Мощность множества. Подмножества. Количество подмножеств в конечном множестве. Сумма мощностей всех подмножеств. Подмножеств с четным и нечетным числом элементов поровну.
- 11** Операции на множествах. Формула включений-исключений.
- 12** Вероятность. Элементарные исходы, вероятностное пространство, события, вероятность события. Независимые события. Несовместные события. Полная система событий.
- 13** Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
- 14** Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости графа. Критерий эйлеровости ориентированного графа.
- 15** Гамильтоновы графы. Необходимое условие гамильтоновости двудольного графа. Теорема Дирака.
- 16** Планарные графы. Формула Эйлера для планарного графа. Графы K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.
- 17** Теорема о 5 красках.
- 18** Формула Эйлера для многогранников и границы ее применимости. Правильные многогранники.
- 19** Формула Пика.

Навыки

- 1 Задание последовательностей формулой и рекуррентно.
- 2 Решение задач при помощи индукции и принципа наименьшего элемента. Доказательство алгебраических формул по индукции.
- 3 Нахождение НОДа чисел при помощи прямого алгоритма Евклида. Нахождение линейного представления НОДа при помощи обратного алгоритма Евклида.
- 4 Решение линейных диофантовых уравнений. Отбор решений, удовлетворяющих условиям.
- 5 Решение задач на НОД и НОК при помощи алгоритма Евклида/разложения на простые множители/представления $(a, b) = d$, $a = ud$, $b = vd$, $[a, b] = uvd$.
- 6 Упрощение выражений, содержащих \cup , \cap , \setminus . Проверка тождеств.
- 7 Проверка, являются ли одни множества подмножествами других.
- 8 Применение формулы включений-исключений.
- 9 Вычисление вероятностей в случае независимости событий.
- 10 Решения задач на условную вероятность при помощи деревьев. Вычисление вероятностей в простейших случаях бесконечных деревьев.
- 11 Решение комбинаторных задач на вероятность.
- 12 Решение линейных и простейших квадратичных сравнений.
- 13 Нахождение остатков от больших степеней при помощи замены основания на сравнимое с ним число, малой теоремы Ферма, китайской теоремы об остатках, теоремы Эйлера.
- 14 Решение диофантовых уравнений рассмотрением их по какому-то модулю.
- 15 Решение систем сравнений при помощи китайской теоремы об остатках.
- 16 Рисование эйлеровых графов одним росчерком. Использование критерия эйлеровости для решения задач.
- 17 Поиск гамильтоновых путей и доказательство того, что граф не является гамильтоновым.
- 18 Применение формулы Эйлера для изучения планарных графов и многогранников. Доказательство непланарности графов.
- 19 Применение формулы Пика к изучению многоугольников на сетке.