8В, спецкурс, занятие 27

26 апреля 2024

Формула Пика

Во всех задачах этого листочка считаем, что сторона клетки равна 1.

Теорема (формула Пика)**.** На листе клетчатой бумаги нарисован многоугольник (возможно, невыпуклый) с вершинами в узлах сетки. Пусть N — количество узлов сетки, целиком лежащих внутри многоугольника, а M — количество узлов сетки, лежащих на границе многоугольника (включая углы).
Тогда площадь многоугольника равна $N + \frac{M}{2} - 1$.

План доказательства

1. Запишем в каждый узел сетки внутри и на границе многоугольника число от 0 до 1 по следующим правилам:

   • в каждый узел внутри многоугольника пишем 1.

   • в каждый узел на стороне многоугольника пишем 0,5.

   • в каждый угол многоугольника пишем $\frac{\alpha}{360^\circ}$, где α — величина этого угла.

   Иными словами, в каждую точку мы пишем, какую долю «поля зрения» человека, стоящего в этой точке, занимает многоугольник.

2. Посчитаем сумму Σ всех записанных в пункте 1 чисел. Оказывается, $\Sigma = N + \frac{M}{2} - 1$. Это легко вывести из того, что сумма углов K-угольника равна $180^\circ(K-2)$.

3. Величина Σ *аддитивна*. Это означает следующее. Пусть у нас есть многоугольник F с суммой чисел Σ. Мы разрезали его ломаной линией (с вершинами в узлах сетки) на многоугольники F_1 и F_2 с суммами Σ_1 и Σ_2. Тогда $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$.

   Это легко доказать, если думать про Σ в терминах «поля зрения».

4. Докажем, что Σ равна площади многоугольника:

   • Сначала для прямоугольников, прямой проверкой.

   • Потом для прямоугольных треугольников, которые являются половинками прямоугольников.

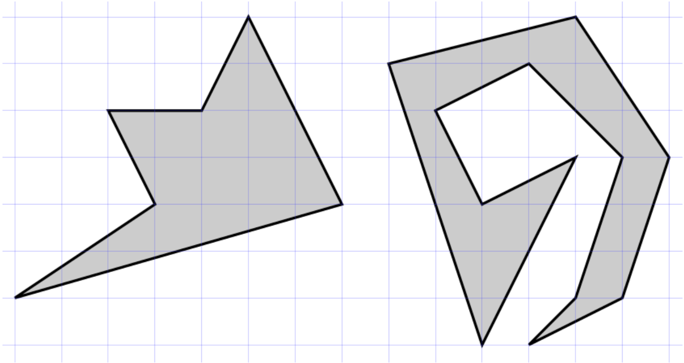
   • Потом для произвольных треугольников. Их можно получить, отрезав от прямоугольника несколько прямоугольных треугольников.

   • Наконец, для произвольных многоугольников. Их можно составить из нескольких треугольников. (То, что любой многоугольник можно триангулировать, это отдельная не очень простая теорема.)

В невыпуклом многоугольнике его граница может касаться сама себя (например, две вершины могут сойтись в одной точке). Чтобы формула Пика работала, узел, в котором происходит касание, должен считаться несколько раз.
Если внутри многоугольника есть k дырок, не касающихся края, то его площадь равна $S = N + \frac{M}{2} - 1 + k$.

В этом листочке можно (и нужно) пользоваться тем, что площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

1 Найдите площадь фигурок:



2 Можно ли разрезать квадрат 50×50 на 15 равных многоугольников с вершинами в узлах сетки?

3 Можно ли нарисовать треугольник с вершинами в узлах сетки, площадь которого равна 0,5, а длины всех сторон больше 5?

4 Шахматный король обошёл доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз, и последним ходом вернулся на исходное поле. Ломаная, последовательно соединяющая центры полей, не имеет самопересечений.

a) Нарисуйте пример такой ломаной. Какую площадь она ограничивает?

b) Зависит ли эта площадь от того, как именно ходил король?

5 a) Чему равна площадь равностороннего треугольника со стороной a?

b) Можно ли нарисовать равносторонний треугольник с вершинами в узлах сетки?

6 Натуральные числа a и b взаимно просты. Через точки $O(0, 0)$ и $A(a, b)$ провели прямую OA. Чему равно наименьшее расстояние от узла сетки, не лежащего на OA, до этой прямой?

7 Вершины выпуклого пятиугольника расположены в узлах сетки. (Многоугольник называется *выпуклым*, если он целиком содержит любой отрезок, концы которого лежат на границе многоугольника.)

a) Докажите, что на стороне этого пятиугольника или внутри него есть хотя бы один узел сетки, кроме вершин.

b) Докажите, что площадь этого пятиугольника не меньше 5/2.

Подсказка: подумайте про четность координат вершин.

8★ a) Докажите, что для точки $O(0, 0)$ и любых точек $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ площадь треугольника OAB равна $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$.

b) В ряд в порядке возрастания выписали все несократимые дроби из отрезка $[0, 1]$, знаменатели которых не превосходят n. Мы получили *последовательность дробей Фарея.* Для $n = 7$ она выглядит так:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}$$

Рассмотрим две соседние дроби в этом ряду $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{c}{d}$ и точки $X(b, a)$, $Y(d, c)$ и $O(0, 0)$. Найдите площадь треугольника OXY и докажите, что $|ad - bc| = 1$.