8В, спецкурс

Зачет 22 апреля 2024. Программа. Спойлеры.

Это краткие решения, на зачете у вас могут попросить восстановить пропущенные детали.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Определение эйлерова графа. Критерий эйлеровости графа.

Теория из листочка «Эйлеровы графы».

$\boxed{\mathbf{2}}$ Связный граф с $2n$ нечетными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n-1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.

Разобьем нечетные вершины на пары, соединим вершины в парах «фиктивными» ребрами. В получившемся графе построим эйлеров цикл. Уберем фиктивные ребра, цикл распадется на n путей. Их можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги $n-1$ раз.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Критерий эйлеровости ориентированного графа.

В связном ориентированном графе существует эйлеров цикл в том и только том случае, когда в каждую вершину входит столько же ребер, сколько выходит.

Доказательство делается по ровно тому же плану, что и в случае неориентированного графа.

$\boxed{\mathbf{4}}$ На кодовом замке 10 кнопок с цифрами от 0 до 9. Для открытия кодового замка нужно нажать 4 кнопки в определенном порядке (при этом предыдущие нажатия не важны). Тогда замок можно наверняка открыть, сделав не более 10003 нажатий.

Заведем ориентированный граф. Его вершины – тройки цифр $\overline{abc}$, а из $\overline{abc}$ в $\overline{bcd}$ ведут ребра $\overline{abcd}$. Очевидно, что граф связный. В каждую вершину входит 10 ребер и выходит столько же. Поэтому в графе есть эйлеров цикл. Он соответствует порядку нажатий. Каждая из 10000 четверок цифр будет в этом цикле по одному разу, поэтому нажатий 10003.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Определение гамильтонова пути/цикла. Простейшие необходимые условия существования гамильтонова пути/цикла.

Теория из листочка «Гамильтоновы графы».

$\boxed{\mathbf{6}}$ *(Теорема Дирака)* Если в графе с $n \geq 3$ вершинами степень каждой вершины не меньше $n/2$, то в графе найдется гамильтонов цикл.

Теория из листочка «Гамильтоновы графы».

$\boxed{\mathbf{7}}$ Если в графе с $n \geq 3$ вершинами степень каждой вершины не меньше $(n-1)/2$, то в графе найдется гамильтонов путь.

Добавим $(n+1)$-ю вершину A, соединенную со всеми остальными. Теперь степень каждой вершины не меньше $(n-1)/2+1=(n+1)/2$, поэтому можно воспользоваться теоремой Дирака. Построим гамильтонов цикл, выкинем из него A, получится путь.

$\boxed{\mathbf{8}}$ В полном ориентированном графе существует гамильтонов путь (задача 6a из листка про ориентированные графы).

Доказательство индукцией по количеству n вершин в графе. База $n=2$ очевидна. Переход: пусть в графе $n+1$ вершина. Выкинем вершину A, на оставшихся n вершинах есть гамильтонов путь $B_1 \to B_2 \to \cdots \to B_n$. Если все ребра ведут $A \to B_i$, то ставим A в начало этого пути. Иначе пусть m – наибольший такой номер, что есть ребро $B_m \to A$. Тогда вставим A после B_m и перед B_{m+1}.

$\boxed{\mathbf{9}}$ В полном ориентированном графе без тройных циклов можно так занумеровать вершины, что каждое ребро идет от меньшего номера к большему (задача 6b из листка про ориентированные графы).

Делаем то же самое, что в предыдущем номере. Раз нет тройных циклов, то при $k<m$ ребра ведут $B_k \to A$. А при $k>m$ ребра ведут $A \to B_k$ по построению m. Так что это победа.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Определение планарных графов. Формула Эйлера.

Теория из листочка «Планарные графы».

$\boxed{\mathbf{11}}$ В планарном графе, у которого больше одного ребра
$\boxed{\text{a}}$ $3F \le 2E$; $\boxed{\text{b}}$ $E \le 3V-6$; $\boxed{\text{c}}$ есть вершина, степень которой не больше 5.

a) У каждой грани не меньше трех сторон. Если сложить все эти стороны, то получится $\ge 3F$. С другой стороны, каждое ребро посчитали 2 раза, поэтому получится $2E$.

b) Делается подстановкой пункта a) в формулу Эйлера.

c) Если степени всех вершин ≥ 6, то ребер $\ge \frac{1}{2}\cdot 6V = 3V$. Это противоречит пункту b.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Графы K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.

Граф K_5 не подходит по пункту b) предыдущего номера. В графе $K_{3,3}$ все циклы четной длины, поэтому, если он планарный, то у каждой грани ≥ 4 стороны. Должно выполняться неравенство $4F \le 2E$, но при этом $V=6$, $E=9$, $F=5$, и оно не выполняется.

$\boxed{\mathbf{13}}$ На окружности отметили n точек и провели всевозможные хорды с концами в этих точках. Никакие три хорды не пересеклись в одной точке.

$\boxed{\text{a}}$ Сколько получилось точек пересечения у этих хорд (не считая концов)?

$\boxed{\text{b}}$ На сколько частей эти хорды разрезали круг?

a) Есть соответствие между точками перечения хорд и четверками концов этих хорд. Поэтому пересечений C_n^4.

b) Вершин $V = C_n^4 + n$. У точек пересечения степень 4, у точек на границе степень $n+1$ (не забываем про дуги окружности). Поэтому $E = \frac{1}{2}\left(4C_n^4 + n(n+1)\right)$. Из этого после подстановки в формулу Эйлера получаем $F-1 = C_n^4 + C_n^2 + C_n^0$ (нужно $F-1$, потому что без внешней грани).

$\boxed{\mathbf{14}}$ Теорема о 5 красках.

Теория из листочка «Планарные графы-2».

$\boxed{\mathbf{15}}$ Определение графа, двойственного к планарному графу. Двойственный граф связный и планарный. Если G' – двойственный к связному графу G, то G двойственный к G'.

Частично это теория из листочка «Планарные графы-2».

Докажем, что $(G')' = G$ *в случае связного* G.

Пусть у графа G *вершин, ребер, граней* V, E, F, *а у* G' *их* V', E', F'. *По определению двойственности* $V' = F, E' = E$ *(причем каждое ребро графа* G *пересекается ровно с одним ребром графа* G' *и наоборот).*

Поскольку оба графа связны, то $V - E + F = V' - E' + F' = 2$. *Поэтому* $V = F'$. *В каждой грани графа* G' *лежит хотя бы одна вершина графа* G *(поскольку границу этой грани пересекает хотя бы одно ребро графа* G, *и один из концов этого ребра лежит внутри грани). Раз* $V = F'$, *то в каждой грани* G' *лежит ровно одна вершина графа* G. *И каждому ребру* G' *соответствует пересекающее его ребро* G. *Поэтому* G *двойственный для* G'.

$\boxed{\mathbf{16}}$ Формула Эйлера для многогранников. Границы ее применимости.

Теория из листочка «Планарные графы-2».

$\boxed{\mathbf{17}}$ Многогранники-фуллерены. Количество пятиугольных граней в них.

Фуллерен – это граф, все степени вершин которого равны 3, а все грани – это пяти- и шестиугольники.

Пусть есть P *пятиугольных граней и* S *шестиугольных. Тогда* $F = P + S, E = (5P + 6S)/2, V = (5P + 6S)/3$. *Значит,* $\frac{5}{3}P + 2S - \frac{5}{2}P - 3S + P + S = 2$, *из чего* $P = 12$.

$\boxed{\mathbf{18}}$ Определение правильного многогранника. Существует всего 5 правильных многогранников.

Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани — одинаковые правильные многоугольники и во всех вершинах сходится одинаковое число ребер.

Если грани треугольные, то в вершине может сходиться 3, 4 или 5 граней, поскольку иначе сумма плоских углов там будет $360°$ *или больше и выпуклой вершины не получится. Если грани квадратные или пятиугольные, то их может сходиться только по 3, а шестиугольных уже и три быть не может.*

Когда мы знаем, какие у нас грани, и сколько их сходится в вершине, то многогранник мы можем склеить единственным образом.