8В, спецкурс, занятие 25
5 апреля 2024
Планарные графы-2

Теорема (о 5 красках)**.** Вершины любого планарного графа можно раскрасить в 5 цветов так, чтобы концы любого ребра были разных цветов. (Такая раскраска называется *правильной*.)

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по количеству вершин. База (для ≤ 5 вершин) очевидна. Для перехода найдем вершину A степени не больше 5 (она есть, так как граф планарный). Выкинем вершину A, по предположению индукции правильно раскрасим оставшиеся вершины в 5 цветов. Теперь вернем A на место. Осталось понять, в какой цвет ее красить.

Если A соединена с ≤ 4 вершинами или если у A есть хотя бы два соседа одного цвета, то подходящий цвет для A есть.

Осталось разобраться со случаем, когда у A пять соседних вершин B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, покрашенные в 5 разных цветов. Будем считать, что эти вершины расположены именно в таком порядке при обходе по часовой стрелке.

Пусть B_1 покрашена в красный цвет, а B_3 – в желтый. Выкинем из нашего графа все вершины, кроме красных и желтых. Есть два варианта.

- Возможно, B_1 и B_3 теперь находятся в разных компонентах связности. Тогда возьмем компоненту с B_1 и перекрасим в ней красный на желтый, а желтый на красный. Вернем все на место. Раскраска осталась правильной, а у A теперь стало два желтых соседа и ни одного красного, значит A можно покрасить в красный.

- Но возможно, что B_1 и B_3 находятся в одной компоненте связности. Тогда они соединены путем, проходящим только по красным и желтым вершинам. Покрасим ребра этого пути в оранжевый.

  Теперь сделаем то же самое с зеленой вершиной B_2 и синей вершиной B_4. Либо можно перекрасить одну из компонент связности в сине-зеленом подграфе, либо есть путь от B_2 до B_4 по синим и зеленым вершинам, покрасим его ребра в бирюзовый.

  Оранжевый и бирюзовый путь должны пересечься (из-за расположения вершин B_1, B_2, B_3, B_4). Но их точкой пересечения не может быть вершина (она должна быть одновременно красная/желтая и синяя/зеленая). А ребра не пересекаются из-за планарности. То есть пересекаться этим путям негде, противоречие.

□

Определение. Дан планарный граф G. Граф G' называется *двойственным* графу G, если вершины графа G' соответствуют граням графа G (включая внешнюю): две вершины G' соединены ребром в том и только том случае, когда соответствующие грани в G имеют общее ребро.

Граф G' обязательно связный (поскольку от любой грани G можно добраться до любой другой, переходя границы).

В двойственном графе G' могут быть петли (если в G был мост). И может быть несколько ребер между одними и теми же вершинами (если в G две грани имели больше одного общего ребра).

Предложение. Двойственный граф тоже планарный.

Доказательство. Поставим вершины G' в центрах граней G. Пусть грани A и B графа G имеют общее ребро e. Тогда нужно соединить ребром соответствующие вершины A', B' двойственного графа. Это ребро пойдет по грани A до границы e, пересечет ее, и пойдет по грани B до вершины B'. Понятно, что можно так проводить эти ребра, чтобы они не пересекались. □

Следствие. Любую политическую карту можно раскрасить в 5 цветов так, чтобы граничащие страны были разных цветов. (Каждая страна считается связной областью.)

Доказательство. Нарисуем «двойственный граф» к этой карте и правильно раскрасим его вершины в 5 цветов. □

На самом деле, любой планарный граф (и любую карту) можно правильно покрасить в 4 цвета. Но доказательство этой *теоремы о 4 красках* крайне сложное.

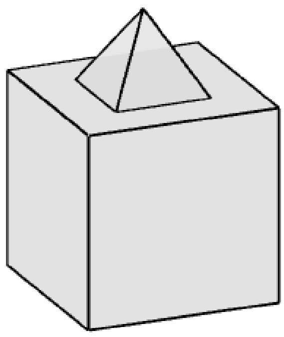
Теорема. Формулу Эйлера $V-E+F=2$ можно применять не только для планарных графов, но и для многогранников.

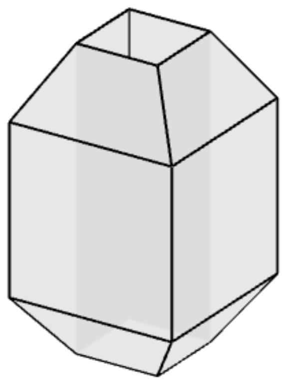
Доказательство. Пусть нам дан многогранник, сделанный из резины (и пустой внутри). Надуем его так, чтобы он стал сферой. Дальше вырежем в этой сфере небольшое отверстие и сильно растянем его края. Резина станет плоским кругом, край отверстия станет краем круга.

Эта операция превратит ребра многогранника в ребра планарного графа. Вершины многогранника станут вершинами этого графа, а грани многогранника – гранями графа. Осталось применить формулу Эйлера к получившемуся графу. □

Замечание. В некоторых «плохих» случаях формула Эйлера не работает. Например, у многогранника слева одна из граней имеет дырку, а значит не является многоугольником. Граф этого многогранника будет несвязный.

А многогранник-«трубку» справа не получится надуть в сферу, вместо нее получится «спасательный круг» – тор.





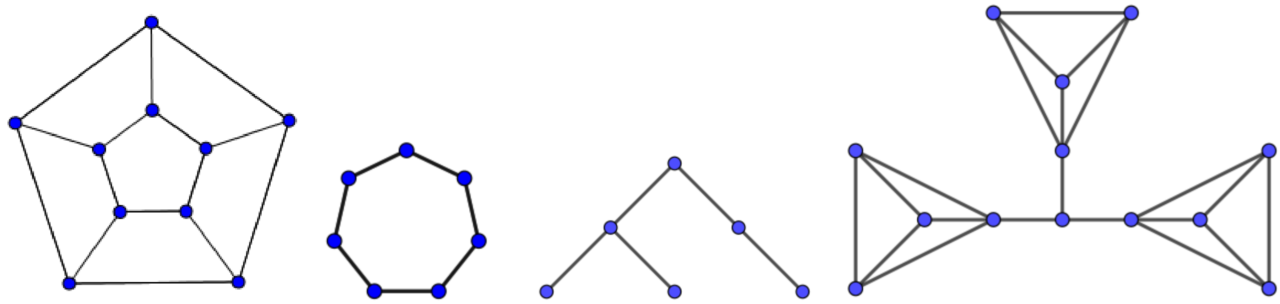
Уточнение теоремы. Формула Эйлера работает для многогранника, если выполняются два условия:

1) все его грани являются многоугольниками;

2) если изготовить многогранник из хорошо тянущейся резины и как следует надуть его, то получится сфера.

Например, для всех *выпуклых* многогранников формула Эйлера точно работает.

$\boxed{\mathbf{1}^{\vee}}$ Нарисуйте двойственные графы.



$\boxed{\mathbf{2}^{\vee}}$ $\boxed{\text{a}}$ Нарисуйте «двойственный» планарный граф, соответствующий политической карте Южной Америки. (Океан страной не считаем.)

$\boxed{\text{b}}$ Правильно раскрасьте его в 4 цвета.

$\boxed{\mathbf{3}^{\vee}}$ Придумайте такой граф G с 6 вершинами, что G' – это такой же граф (с точностью до перемещения вершин).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Существует ли многогранник, у которого одна грань – пятиугольник, а остальные – четырёхугольники?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Докажите, что у любого выпуклого многогранника есть две грани с одинаковым количеством сторон.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Пусть G – связный планарный граф, а G' – двойственный к нему. Докажите, что G – двойственный к G'.

$\boxed{\mathbf{7}}$ У многогранника 24 грани, они все треугольники. Сколько в нем вершин?

$\boxed{\mathbf{8}}$ *Фуллерен* – это граф, все степени вершин которого равны 3, а все грани – это пяти- и шестиугольники (например, футбольный мяч). Найдите количество пятиугольных граней у фуллеренов.

$\boxed{\mathbf{9}}$ В выпуклом многограннике V вершин. Найдите сумму всех углов всех его граней.

Определение. Выпуклый многогранник называется *правильным*, если все его грани — одинаковые правильные многоугольники и во всех вершинах сходится одинаковое число ребер.

Планарный граф называется *правильным*, если степени всех его вершин равны, а у всех граней одинаковое число сторон.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Докажите, что существует всего пять правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

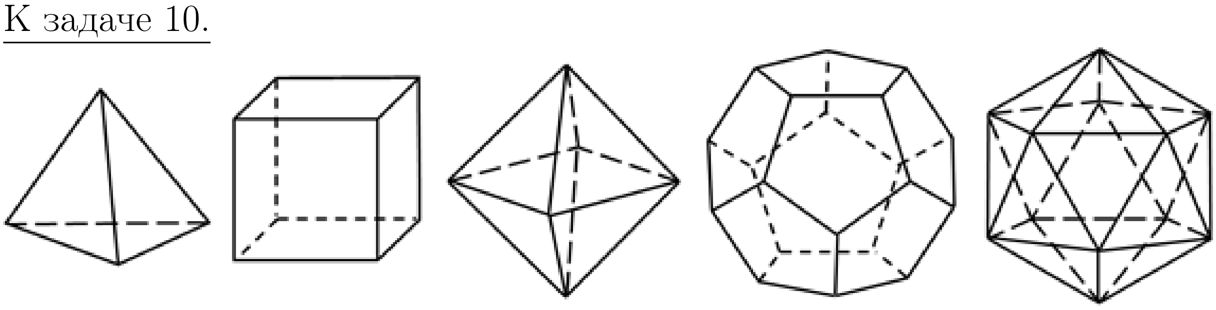
Подсказка: сколько каких граней может сходиться в одной вершине?

$\boxed{\mathbf{11}}$ Сколько в правильном планарном графе может быть вершин, ребер, граней? Перечислите все варианты.

$\boxed{\mathbf{12}^{\star}}$ Выведите из *теоремы о 4 красках* следующее утверждение: если в планарном графе нет мостов и степень каждой вершины равна 3, то его ребра можно раскрасить в 3 цвета *правильным образом* (так, чтобы ребра одного цвета из одной вершины не выходили).

К задаче 2.

К задаче 10.



Тетраэдр Куб Октаэдр Додекаэдр Икосаэдр