8В, спецкурс, занятие 3
15, 18 сентября 2023
Индукция и алгебра

0 a Докажите по индукции соотношение

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

b Последовательность x_n задана рекуррентно:

$$x_1=1,\ x_2=4,\ x_{n+2}=4x_{n+1}-3x_n+4n.$$

Докажите по индукции, что $x_n=n^2$.

Галочкой отмечены номера, которые необходимо сдать письменно в начале занятия в понедельник.

1 Докажите по индукции соотношения:

a$^{\vee}$ $1+2+3+\dots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

b$^{\vee}$ $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c$^{\vee}$ $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$;

d $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=(1+2+3+\dots+n)^2$.

2$^{\vee}$ Последовательность a_n задана формулой: $a_n=3n-1$. Последовательность b_n задана рекуррентно: $b_1=2$, $b_2=5$, $b_{n+2}=2b_{n+1}-b_n$. Докажите по индукции, что эти последовательности совпадают.

3 Докажите, что

a $2^n>n$ при всех натуральных n;

b $n!>2^n$ при $n>3$;

c $2^n>n^2$ при $n>4$.

4 Чему равно $1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2$?

Идеология: доказывать такие формулы легко, а вот придумывать их — сложно. Есть несколько способов, как это можно сделать:

- Экстрасенсорный. Вычислите суммы одного, двух, трех, четырех... первых слагаемых, угадайте формулу и докажите ее по индукции.
- Геометрический. Представьте сумму в виде какой-нибудь фигуры из соответствующего количества клеточек/кубиков. Разрежьте эту фигуру на более простые части или же сложите из нескольких таких фигур что-нибудь более простое, а затем вычислите ее площадь/объем.
- Сведение задачи к уже решенной. Найдите какую-нибудь похожую формулу и сделайте из нее нужную вам.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Найдите ошибки в рассуждениях.

$\boxed{\text{a}}$ Докажем по индукции, что все коровы имеют одну масть.

База: одна корова, разумеется, имеет одну масть.

Переход: пусть мы уже доказали, что в стаде из n коров они все одной масти. Докажем это для стада из $n+1$ коровы. Отделим какую-нибудь корову и отведем ее в сторону. Оставшиеся n коров по предположению индукции одной масти. Теперь вернем корову в стадо и отделим какую-нибудь другую. Получившееся стадо тоже состоит из n коров, а значит они все одной масти. Получается, что корова, которую мы отделяли вначале, той же масти, что и те $n-1$ коров, которых мы не трогали. А значит, все стадо одной масти, что и требовалось доказать.

$\boxed{\text{b}}$ Докажем, что любой граф, из каждой вершины которого выходит хотя бы одно ребро, связен. Воспользуемся индукцией по числу вершин.

База: Одной вершины в таком графе быть не может. Если вершин две, то граф связен.

Переход: Пусть утверждение уже доказано для всех графов с n вершинами. Докажем для графа Γ с $n+1$ вершиной. Возьмем какую-нибудь вершину A и уберем ее вместе с выходящими из нее ребрами. Остался граф Γ' с n вершинами, он связен по предположению индукции. Теперь вернем A на место. Из нее выходило хотя бы одно ребро, поэтому она связана с какой-то вершиной из связного графа Γ'. Значит, исходный граф Γ тоже связен, что и требовалось доказать.

$\boxed{\text{c}}$ Треугольник разбит отрезками на несколько меньших треугольников. Докажем, что один из треугольников разбиения обязательно не остроугольный. Воспользуемся индукцией по числу отрезков.

База: если отрезок один, то он идет из вершины треугольника к противоположной стороне. У этой стороны образуется хотя бы один неострый угол.

Переход: предположим, что если треугольник разбит n отрезками на несколько треугольников, то хотя бы один из них не остроугольный. Проведем $(n+1)$-й отрезок. Он разобьет какой-то треугольник на два новых, один из них обязательно будет не остроугольный. Утверждение доказано.