8В, спецкурс, занятие 24

29 марта 2024

Планарные графы

Определение. Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались. (При этом ребра не обязательно должны быть прямыми линиями.)

У любого графа можно подсчитать количество вершин V и количество ребер E.

У планарного графа дополнительно можно еще подсчитать количество частей, на которые он разрезает плоскость. Эти части называются *гранями*, их количество обозначается через F.

Теорема (формула Эйлера)**.** В любом связном планарном графе выполняется соотношение $V-E+F=2$.

Доказательство. Зафиксируем число вершин V и будем вести индукцию по числу ребер E.

База: минимальное число ребер в связном графе с V вершинами равняется $V-1$. В этом случае граф является деревом, в нем нет циклов, а значит грань всего одна. Получается $V-(V-1)+1=2$.

Переход: допустим, для всех графов с $E-1$ ребрами формула уже доказана. Рассмотрим граф с E ребрами. Пусть в нем F граней. В графе есть цикл (поскольку для деревьев все уже доказано). Удалим одно ребро из этого цикла. От этого число граней уменьшится на 1. Получится граф с V вершинами, $E-1$ ребрами и $F-1$ гранями. По предположению индукции, $V-(E-1)+(F-1)=2$. А значит и в исходном графе $V-E+F=2$. □

Теорема. Если в планарном графе V вершин, E ребер, F граней и k компонент связности, то $V-E+F=k+1$.

Доказательство. Можно доказать аналогично индукцией по числу ребер. Когда мы убираем ребро, сохраняя граф связным, то E и F уменьшаются на 1, а V и k остаются неизменными. А когда мы убираем мост, то E уменьшается на 1, k увеличивается на 1, а V и F остаются неизменными.

В любом случае, значение выражения $V-E+F-k$ остается неизменным, а для графа без ребер оно равно 1. □

Обозначим через K_n *полный граф* с n вершинами (в нем любые две вершины соединены ребром).

Через $K_{n,m}$ обозначим *полный двудольный граф*, с n вершинами в одной доле и m в другой (любые две вершины из разных долей соединены ребром).

$\boxed{\mathbf{1}^{\vee}}$ Нарисуйте на плоскости без пересечений графы $\boxed{\text{a}}$ K_4; $\boxed{\text{b}}$ $K_{2,n}$; $\boxed{\text{c}}$ какой-нибудь граф с 10 вершинами, степени всех вершин которого не меньше 4.

$\boxed{\mathbf{2}^{\vee}}$ В стране 7 озер, соединенных между собой 11 каналами, причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в стране островов, образованных озерами и каналами?

3 Докажите, что в планарном графе, у которого больше одного ребра

a $3F \le 2E$ (подсказка: у каждой грани не меньше трех сторон);

b $E \le 3V - 6$;

c есть вершина, степень которой не больше 5.

4 Докажите, что если в планарном графе нет циклов длины три, то $2F \le E$.

5 Докажите, что графы a K_5; b $K_{3,3}$ не являются планарными.

6 Докажите, что вершины планарного графа можно раскрасить в шесть цветов так, чтобы концы любого ребра были разных цветов.

7 Ребра графа K_{11} раскрасили в красный и синий цвета. Докажите, что либо красный, либо синий граф не планарный.

8 Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?

9 На плоскости проведено n различных окружностей так, что каждые две из них пересекаются в двух точках и никакие три из них не имеют общей точки. Докажите, что окружности разбивают плоскость на $n^2 - n + 2$ частей.

10★ На окружности отметили n точек и провели всевозможные хорды с концами в этих точках. Оказалось, что никакие три хорды не пересеклись в одной точке.

a Сколько получилось точек пересечения у этих хорд (не считая концов)?

Подсказка: эта комбинаторная задача была у вас в 7 классе в листке «соответствия».

b На сколько частей эти хорды разрезали круг?

c Вычислите ответы для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Попробуйте объяснить, откуда взялась закономерность для первых членов последовательности, и почему она не продолжилась.