8В, спецкурс, занятие 23
25 марта 2024
Ориентированные графы

Определение. *Ориентированным* называется граф, каждое ребро которого имеет направление.

В этом листочке любые две вершины соединены максимум одним ребром (ребра $A \to B$ и $B \to A$ не могут быть одновременно), и петель ($A \to A$) тоже нет.

1 По кругу записаны семь натуральных чисел. Известно, что в каждой паре соседних чисел одно делится на другое. Докажите, что найдётся пара и не соседних чисел с таким же свойством.

2 На сторонах некоторого многоугольника расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.

3 В ориентированном графе с n вершинами можно добраться от любой вершины до любой другой, соблюдая ориентацию ребер (такой граф называется *сильно связным*). Докажите, что в нем хотя бы n ребер.

4 В школе 1543 ученика. Каждому нравится ровно k из них. При каких k можно утверждать, что найдутся двое учеников, которые либо оба друг другу нравятся, либо оба друг другу не нравятся?

5 В стране несколько городов, соединенных односторонними авиалиниями. Известно, что для любых двух городов A и B найдется такой город C, что из него можно долететь и до A, и до B (возможно, с пересадками). Докажите, что найдется такой город X, что из него можно долететь до любого другого.

6 Прошел однокруговой турнир по волейболу с n участниками.

a Докажите, что участников можно так занумеровать числами $1, 2, \ldots, n$, что первый выиграл у второго, второй у третьего,..., $(n-1)$-й у n-го.

b Оказалось, что нет тройки участников A, B, C, которые бы выиграли друг у друга по кругу. Докажите, что тогда участников можно так занумеровать числами $1, 2, \ldots, n$, что каждый выиграл у всех участников с номерами, большими своего.

7 В некотором государстве 101 город. Некоторые из них соединены дорогой с односторонним движением.

a В каждый город входит 50 дорог и из каждого города выходит 50 дорог. Докажите, что из каждого города можно доехать в любой другой, проехав не более чем по двум дорогам.

b В каждый город входит 40 дорог и из каждого города выходит 40 дорог. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого, проехав не более чем по трём дорогам.

8★ На соревнованиях по фигурному велосипедированию было 100 судей. Каждый судья упорядочил всех участников (от лучшего по его мнению – к худшему). Оказалось, что ни для каких трёх участников A, B, C не нашлось трёх судей, один из которых считает, что A – лучший из трёх, а B – худший, другой – что B лучший, а C худший, а третий – что C лучший, а A худший. Докажите, что можно составить общий рейтинг участников так, чтобы для каждых двух участников A и B тот, кто выше в рейтинге, был бы лучше другого по мнению хотя бы половины судей.

8В, спецкурс, занятие 23

25 марта 2024

Ориентированные графы

Определение. *Ориентированным* называется граф, каждое ребро которого имеет направление.

В этом листочке любые две вершины соединены максимум одним ребром (ребра $A \to B$ и $B \to A$ не могут быть одновременно), и петель ($A \to A$) тоже нет.

1 По кругу записаны семь натуральных чисел. Известно, что в каждой паре соседних чисел одно делится на другое. Докажите, что найдётся пара и не соседних чисел с таким же свойством.

2 На сторонах некоторого многоугольника расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.

3 В ориентированном графе с n вершинами можно добраться от любой вершины до любой другой, соблюдая ориентацию ребер (такой граф называется *сильно связным*). Докажите, что в нем хотя бы n ребер.

4 В школе 1543 ученика. Каждому нравится ровно k из них. При каких k можно утверждать, что найдутся двое учеников, которые либо оба друг другу нравятся, либо оба друг другу не нравятся?

5 В стране несколько городов, соединенных односторонними авиалиниями. Известно, что для любых двух городов A и B найдется такой город C, что из него можно долететь и до A, и до B (возможно, с пересадками). Докажите, что найдется такой город X, что из него можно долететь до любого другого.

6 Прошел однокруговой турнир по волейболу с n участниками.

a Докажите, что участников можно так занумеровать числами $1, 2, \ldots, n$, что первый выиграл у второго, второй у третьего,..., $(n-1)$-й у n-го.

b Оказалось, что нет тройки участников A, B, C, которые бы выиграли друг у друга по кругу. Докажите, что тогда участников можно так занумеровать числами $1, 2, \ldots, n$, что каждый выиграл у всех участников с номерами, большими своего.

7 В некотором государстве 101 город. Некоторые из них соединены дорогой с односторонним движением.

a В каждый город входит 50 дорог и из каждого города выходит 50 дорог. Докажите, что из каждого города можно доехать в любой другой, проехав не более чем по двум дорогам.

b В каждый город входит 40 дорог и из каждого города выходит 40 дорог. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого, проехав не более чем по трём дорогам.

8★ На соревнованиях по фигурному велосипедированию было 100 судей. Каждый судья упорядочил всех участников (от лучшего по его мнению – к худшему). Оказалось, что ни для каких трёх участников A, B, C не нашлось трёх судей, один из которых считает, что A – лучший из трёх, а B – худший, другой – что B лучший, а C худший, а третий – что C лучший, а A худший. Докажите, что можно составить общий рейтинг участников так, чтобы для каждых двух участников A и B тот, кто выше в рейтинге, был бы лучше другого по мнению хотя бы половины судей.