8В, спецкурс, занятие 22

11 марта 2024

Гамильтоновы графы

Определение. Путь, проходящий по всем вершинам графа по одному разу, называется *гамильтоновым путем.*

Замкнутый гамильтонов путь называется *гамильтоновым циклом.*

В отличие от эйлеровости, критерия наличия гамильтонова цикла (пути), работающего в обе стороны, не существует. Тем не менее, можно сформулировать некоторые необходимые и достаточные условия.

Предложение. Если в графе есть гамильтонов цикл, то граф связный и степень каждой его вершины не меньше 2.

Если в графе есть гамильтонов путь, то граф связный и в нем не больше двух вершин степени 1.

Предложение. Если граф двудольный и в нем есть гамильтонов цикл, то в обоих его долях поровну вершин.

Если граф двудольный и в нем есть гамильтонов путь, то количества вершин в его долях отличаются максимум на 1.

Теорема (Дирака)**.** Если в графе с $n \geq 3$ вершинами степень каждой вершины не меньше $n/2$, то в графе найдется гамильтонов цикл.

Доказательство. Перефразируем утверждение: если в компании из n человек у каждого не менее $n/2$ друзей (и, значит, не больше $n/2-1$ недругов), то можно рассадить их всех за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом со своими друзьями.

Сначала рассадим людей как-то. Теперь будем улучшать конструкцию, пока число пар соседей-недругов не уменьшится до нуля.

Допустим, слева от А сидит его недруг Б. Рассмотрим всех друзей А (их не меньше $n/2$). Хотя бы у одного из них (назовем его В) сосед слева является другом Б (поскольку недругов у Б строго меньше $n/2$). Получилась следующая ситуация: БА...ГВ, где В — друг А, а Г — друг Б.

Теперь возьмем всех людей от А до Г включительно и пересадим их в обратном порядке. Получится БГ...АВ. Раньше пара БА была недругами, а пара ГВ — неважно кем. Теперь вместо этих пар появилось две пары друзей БГ и АВ, а остальные пары соседей не изменились. Поэтому число пар соседей-недругов уменьшилось. Продолжая так дальше, добьемся нужной рассадки.

□

$\boxed{\mathbf{1}^{\vee}}$ Может ли шахматный конь обойти $\boxed{\text{a}}$ доску 4×4; $\boxed{\text{b}}$ доску 4×4 с вырезанными углами, побывав в каждой клетке по одному разу?

Указание: рисуйте ход коня одним диагональным отрезком, а не буквой Г, так рисунок будет аккуратнее и понятнее.

$\boxed{\mathbf{2}^{\vee}}$ У куба отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Докажите, что по отрезкам этих диагоналей нельзя обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу.

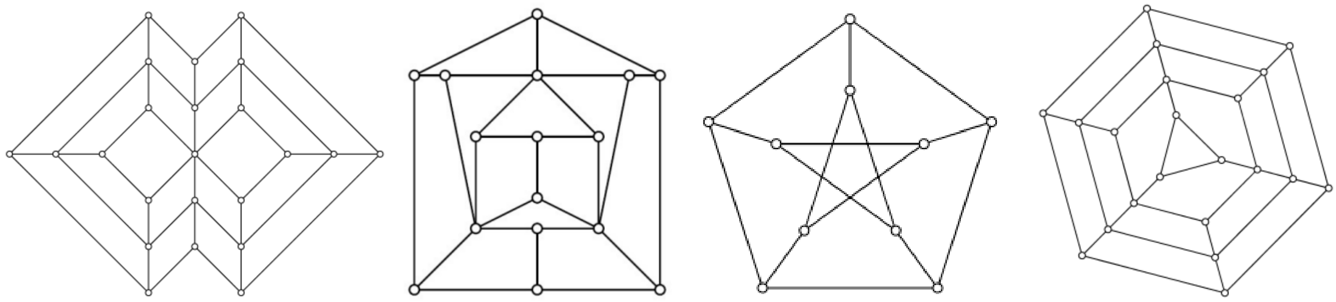
Указание: постарайтесь обойтись без переборного доказательства. Для этого прочитайте теорию.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\boxed{\text{a}}$ Существует ли гамильтонов путь на первом графе?

$\boxed{\text{b}}$ Существует ли гамильтонов путь на втором графе?

$\boxed{\text{c}}$ Существует ли гамильтонов цикл на третьем графе?

$\boxed{\text{d}^\bigstar}$ Существует ли гамильтонов цикл на четвертом графе?



$\boxed{\mathbf{4}}$ На поверхности куба проведена замкнутая восьмизвенная ломаная, вершины которой совпадают со всеми вершинами куба. Какое наименьшее число звеньев этой ломаной может совпадать с ребрами куба?

$\boxed{\mathbf{5}}$ На конференцию приехало $2n$ человек, каждый из которых знаком не менее чем с n остальными. Докажите, что участников можно так расселить в двухместные номера, чтобы в каждом номере жили знакомые друг с другом люди.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Выведите из теоремы Дирака, что если в графе с $n \geq 3$ вершинами степень каждой вершины не меньше $(n-1)/2$, то в графе найдется гамильтонов путь.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Дед барона Мюнхгаузена построил квадратный замок, разделил его на 9 квадратных залов и в центральном разместил арсенал. Отец барона разделил каждый из восьми оставшихся залов на 9 равных квадратных холлов и во всех центральных холлах устроил зимние сады. Сам барон разделил каждый из 64 свободных холлов на 9 равных квадратных комнат и в каждой из центральных комнат устроил бассейн, а остальные сделал жилыми. Барон хвастается, что ему удалось обойти все жилые комнаты, побывав в каждой по одному разу, и вернуться в исходную (в каждой стене между двумя соседними жилыми комнатами проделана дверь). Могут ли слова барона быть правдой?

$\boxed{\mathbf{8}}$ В стране N городов. Между любыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнёт путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.

Подсказка: воспользуйтесь индукцией.

$\boxed{\mathbf{9}}$ У Кощея 100 узников, все они сидят в одиночных камерах. Каждый день Кощей меняет двух узников местами. Он хочет, чтобы через 100! дней каждый из способов рассадить узников по камерам был реализован по разу. Удастся ли Кощею составить план действий, приводящий к желаемому результату?