

8В, спецкурс, занятие 21

1 марта 2024

Эйлеровы графы

Определение. Путь, проходящий по всем ребрам графа по одному разу, называется *эйлеровым путем*.

Замкнутый эйлеров путь называется *эйлеровым циклом*.

Граф, в котором есть эйлеров цикл, называется *эйлеровым графом*.

Теорема (критерий эйлеровости графа). В связном графе есть эйлеров цикл в том и только том случае, когда все вершины графа имеют четную степень.

В связном графе есть незамкнутый эйлеров путь в том и только том случае, когда в нем есть ровно две вершины нечетной степени.

Доказательство. Когда мы обходим граф по эйлерову циклу, в каждую вершину мы входим и выходим одинаковое количество раз. Поэтому все вершины имеют четную степень.

Когда мы обходим граф по незамкнутому эйлерову пути, в каждую вершину, кроме начальной и конечной, мы входим и выходим одинаковое количество раз. Из начальной вершины мы выходим на 1 раз больше, а в конечную — входим на 1 раз больше. Поэтому начальная и конечная вершины имеют нечетную степень, а остальные — четную.

Теперь докажем, что если в связном графе все вершины имеют четную степень, то в нем есть эйлеров цикл. Воспользуемся индукцией по количеству ребер.

База: если в связном графе 0 ребер, то он состоит из одной вершины и в нем, естественно, есть эйлеров цикл.

Переход: пусть мы уже все доказали для графов в которых меньше n ребер. Рассмотрим граф с n ребрами. В нем можно выделить цикл: пойдём по ребрам, пока не придем в вершину, где мы уже были (в тупик мы не упрёмся, поскольку степени всех вершин не меньше 2).

Покрасим этот цикл в зеленый и временно уберем его. Граф развалится на несколько компонент связности, в каждой из которых все вершины четной степени. По предположению индукции все эти компоненты являются эйлеровыми графами.

Сконструируем эйлеров цикл в исходном графе. Будем идти по зеленому циклу, пока мы не придем в новую компоненту связности. Обойдем ее по эйлерову циклу (который существует по предположению индукции) и пойдём по зеленому циклу дальше. И так пока не вернемся в вершину, откуда начинали.

Наконец, если в исходном графе было две вершины нечетной степени A и B , то добавим фиктивное ребро AB , сделав степени всех вершин четными. Построим эйлеров цикл, а затем выкинем из этого цикла AB . Это даст эйлеров путь. \square

Замечание. *Мультиграфом* называется граф, в котором разрешены петли (ребра, соединяющие вершину саму с собой) и кратные ребра (несколько ребер, соединяющие одну и ту же пару вершин). Естественно, критерий эйлеровости применим и к мультиграфам тоже.

1 Принимающий нарисует вам картинку, а вы покажете, как нарисовать ее одним росчерком.

2 Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратиков клетчатого квадрата 4×4 представить в виде объединения

a) пяти ломаных длины 8; b) восьми ломаных длины 5?

3 Есть много кусков проволоки длиной 5 см и много кусков длиной 7 см. Требуется выбрать несколько кусков и спаять из них каркас куба.

a) Какая наименьшая длина ребра может быть у этого куба?

b) А какая наименьшая натуральная длина у него может быть?

4 Докажите, что любой связный граф можно нарисовать, не отрывая ручки от бумаги и проводя каждое ребро ровно два раза.

5 Докажите, что связный граф с $2n$ нечетными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n - 1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.

6 Из каждого города в другие города страны ведут ровно 5 дорог. Докажите, что две компании могут так приватизировать эти дороги, что из каждого города будут выходить 2 дороги одной и 3 дороги другой компании.

Определение. *Ориентированным* называется граф, в котором задано направление каждого ребра. В задачах этого листочка ориентированным графам разрешено иметь ребра $A \rightarrow A$ и по несколько ребер $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$.

7 a) В связном графе степени всех вершин четны. Докажите, что его ребра можно ориентировать так, чтобы в каждую вершину входило и выходило поровну ребер.

b) (*Критерий эйлеровости для ориентированного графа*) Докажите, что в связном ориентированном графе существует эйлеров цикл в том и только том случае, когда в каждую вершину входит столько же ребер, сколько выходит.

8 На отдельных бумажках выписали все девятизначные числа, составленные из цифр 1, 2, . . . , 9 (каждая цифра по одному разу). Можно ли выложить эти бумажки по кругу «по правилам домино» (то есть чтобы каждое следующее число начиналось с той цифры, на которую заканчивается предыдущее)?

9 На кодовом замке 10 кнопок с цифрами от 0 до 9. Для открытия кодового замка нужно нажать 4 кнопки в определенном порядке (при этом предыдущие нажатия не важны). Докажите, что замок можно наверняка открыть, сделав не более 10003 нажатий.

10★ Марк разрезал квадрат 1542×1542 на доминошки. После чего Гриша расставляет в клетках каждой доминошки числа 1 или -1 (в двух клетках одной доминошки одно и то же число). Гриша стремится, чтобы суммы во всех строчках и столбцах были по модулю не более k . Для какого наименьшего k он может это сделать независимо от разрезания Марка?