

## 8В, спецкурс, занятие 20

16 февраля 2024

### Разнойбой по теории чисел

Задачи могут быть расположены не в порядке возрастания сложности.

- 1    а) Найдите все целые  $a$ , для которых  $a^{10} + 1$  оканчивается на 0.  
   b) Докажите, что ни при каком целом  $a$  число  $a^{100} + 1$  не оканчивается на 0.

2 Числа  $a$  и  $b$  взаимно просты. Докажите, что  $\text{НОД}(a + b, a^2 + b^2)$  равен 1 или 2.

3 Докажите, что число  $40^{81} + 17^{160}$  является составным.

4 Вася вписал в клетки таблицы  $4 \times 18$  натуральные числа от 1 до 72 в некотором одному ему известном порядке. Сначала он нашел произведение чисел, стоящих в каждом столбце, а затем у каждого из 18 полученных произведений вычислил сумму цифр. Могли ли все получившиеся суммы оказаться одинаковыми?

5 Дано целое  $n$ . Докажите, что число  $n(2n + 1)(3n + 1) \dots (2024n + 1)$  делится на каждое простое число, меньшее 2024.

6 Пусть  $S(x)$  – сумма цифр натурального числа  $x$ . Решите уравнение  $x + S(x) + S(S(x)) + S(S(S(x))) = 2024$ .

7 Маша выписывает последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_{1543}$  натуральных чисел, удовлетворяющую рекуррентному соотношению  $x_{n+1} = 2x_n + 1$ . Докажите, что она может выбрать такое начальное число  $x_1$ , чтобы у каждого члена последовательности было минимум 10 различных простых делителей.

8 Докажите, что сумма любых двух последовательных простых чисел (начиная с  $3 + 5 = 8$ ) раскладывается минимум на 3 простых множителя.

9★ Докажите, что уравнение  $a^5 + b^6 = c^7$  имеет бесконечно много натуральных решений.