

8В, спецкурс, занятие 20

16 февраля 2024

Разнойбой по теории чисел

Задачи могут быть расположены не в порядке возрастания сложности.

- 1 а) Найдите все целые a , для которых $a^{10} + 1$ оканчивается на 0.
 b) Докажите, что ни при каком целом a число $a^{100} + 1$ не оканчивается на 0.
- 2) Числа a и b взаимно просты. Докажите, что $\text{НОД}(a + b, a^2 + b^2)$ равен 1 или 2.
- 3) Докажите, что число $40^{81} + 17^{160}$ является составным.

4) Вася вписал в клетки таблицы 4×18 натуральные числа от 1 до 72 в некотором одному ему известном порядке. Сначала он нашел произведение чисел, стоящих в каждом столбце, а затем у каждого из 18 полученных произведений вычислил сумму цифр. Могли ли все получившиеся суммы оказаться одинаковыми?

5) Дано целое n . Докажите, что число $n(2n + 1)(3n + 1) \dots (2024n + 1)$ делится на каждое простое число, меньшее 2024.

6) Пусть $S(x)$ – сумма цифр натурального числа x . Решите уравнение $x + S(x) + S(S(x)) + S(S(S(x))) = 2024$.

7) Маша выписывает последовательность $x_1, x_2, \dots, x_{1543}$ натуральных чисел, удовлетворяющую рекуррентному соотношению $x_{n+1} = 2x_n + 1$. Докажите, что она может выбрать такое начальное число x_1 , чтобы у каждого члена последовательности было минимум 10 различных простых делителей.

8) Докажите, что сумма любых двух последовательных простых чисел (начиная с $3 + 5 = 8$) раскладывается минимум на 3 простых множителя.

9★) Докажите, что уравнение $a^5 + b^6 = c^7$ имеет бесконечно много натуральных решений.