8В, спецкурс, занятие 2
11 сентября 2023
Индукция

Принцип математической индукции: дана последовательность утверждений $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Если верно утверждение A_1, и при любом n из утверждения A_n можно вывести A_{n+1}, то все утверждения в этой последовательности верны.

Решение задачи «по индукции» состоит из нескольких шагов:

• Сформулировать последовательность утверждений, которые будем доказывать. (Обычно она выглядит как одно утверждение, в котором есть переменная n.)

• Доказать первое утверждение или несколько (*база индукции*).

• Предположить, что n-е утверждение верно (*предположение индукции*).

• Доказать, что в этом случае и $(n+1)$-е утверждение тоже верно (*индукционный переход* или *шаг индукции*).

Тогда по принципу математической индукции получится, что все утверждения серии верны.

Тренировочные задачи

$\boxed{\mathbf{1}}$ *Ханойская башня.* Есть три стержня, на один из них надета пирамидка из n колец. Кольца можно по одному переносить со стержня на стержень, причем большие кольца нельзя класть на меньшие.

$\boxed{\text{a}}$ Докажите, что можно переместить всю пирамидку с одного стержня на другой.

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что это можно сделать за $2^n - 1$ ход.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{\text{a}}$ Трехклеточный уголок увеличили в 2^n раз. Докажите, что получившуюся фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки.

$\boxed{\text{b}}$ Из квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали произвольную клетку. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки.

Можно делать шаг индукции не от A_n к A_{n+1}, а, например, от A_n к A_{n+2} или от A_n к A_{n+5}. В этом случае база должна состоять больше чем из одного утверждения.

$\boxed{\mathbf{3}}$ В Стране Дураков в ходу монеты в 3 и 5 тугриков. Докажите, что ими можно заплатить без сдачи любую сумму, начиная с 8 тугриков.

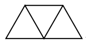
$\boxed{\mathbf{4}}$ Докажите, что квадрат можно разбить на любое число квадратов (не обязательно равных), большее пяти.

Иногда удобно делать шаги «сверху вниз»: начать с объекта на $(n+1)$-й «ступеньке» (про который мы хотим доказать) и посмотреть, с каким объектом на одной из предыдущих ступенек (про который уже все доказано по предположению) он связан.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Докажите, что любое натуральное число n представимо в виде суммы различных степеней двойки (не забудьте, что $1 = 2^0$).

$\boxed{\mathbf{6}}$ Вокруг города проходит кольцевая дорога с односторонним движением, и через город от края до края проходит несколько магистралей с односторонним движением. Докажите, что есть такой квартал (не разбитый магистралями на части), вокруг которого можно объехать, не нарушая правил.

Зачетные задачи

1 Треугольник со стороной 2^n разбили на единичные треугольнички и затем отрезали треугольничек в одной из вершин. Докажите, что оставшуюся часть можно разделить на трапеции из трех треугольничков .

2 Двум логикам написали на лбу по натуральному числу, а вслух сообщили, что числа отличаются на 2. Далее их по очереди много раз спрашивают, знают ли они свое число, и те вслух говорят «Да» или «Нет». Докажите, что рано или поздно кто-то скажет «Да».

3 В нескольких местах кольцевой дороги стоят автомобили. Если весь бензин, имеющийся в их баках, слить в одну машину, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге до своего прежнего места.

a Докажите, что хотя бы одна машина сможет доехать до следующей за ней по часовой стрелке.

b Докажите, что хотя бы одна машина может объехать все кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.

Дополнительные задачи

4 «Трилистником» называется фигура из трех лучей, выходящих из одной точки. На плоскости нарисовали несколько трилистников, они разбили плоскость на несколько частей. (Никакие два луча из разных трилистников не накладываются друг на друга.) Докажите, что можно раскрасить эти части в три цвета так, чтобы одноцветные части не имели общих отрезков границы.

5 В поселке 100 домов. Какое наибольшее число замкнутых не пересекающихся заборов можно построить, чтобы каждый забор огораживал хотя бы один дом и никакие два забора не огораживали бы одну и ту же совокупность домов?

6 Анна Алексеевна изобрела прибор, который может поделить любой отрезок пополам или в отношении $n:(n+1)$ (n – произвольное натуральное число). Олег Алексеевич придумал два натуральных числа a и b. Правда ли, что с помощью своего прибора Анна Алексеевна обязательно сможет поделить отрезок в отношении $a:b$?

7 Можно ли отметить на плоскости несколько точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой отмеченной точки находилось ровно 10 отмеченных?

8В, спецкурс, занятие 2

11 сентября 2023

Индукция

Принцип математической индукции: дана последовательность утверждений $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Если верно утверждение A_1, и при любом n из утверждения A_n можно вывести A_{n+1}, то все утверждения в этой последовательности верны.

Решение задачи «по индукции» состоит из нескольких шагов:

• Сформулировать последовательность утверждений, которые будем доказывать. (Обычно она выглядит как одно утверждение, в котором есть переменная n.)

• Доказать первое утверждение или несколько (*база индукции*).

• Предположить, что n-е утверждение верно (*предположение индукции*).

• Доказать, что в этом случае и $(n+1)$-е утверждение тоже верно (*индукционный переход* или *шаг индукции*).

Тогда по принципу математической индукции получится, что все утверждения серии верны.

Тренировочные задачи

$\boxed{\mathbf{1}}$ *Ханойская башня.* Есть три стержня, на один из них надета пирамидка из n колец. Кольца можно по одному переносить со стержня на стержень, причем большие кольца нельзя класть на меньшие.

$\boxed{\text{a}}$ Докажите, что можно переместить всю пирамидку с одного стержня на другой.

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что это можно сделать за $2^n - 1$ ход.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{\text{a}}$ Трехклеточный уголок увеличили в 2^n раз. Докажите, что получившуюся фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки.

$\boxed{\text{b}}$ Из квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали произвольную клетку. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки.

Можно делать шаг индукции не от A_n к A_{n+1}, а, например, от A_n к A_{n+2} или от A_n к A_{n+5}. В этом случае база должна состоять больше чем из одного утверждения.

$\boxed{\mathbf{3}}$ В Стране Дураков в ходу монеты в 3 и 5 тугриков. Докажите, что ими можно заплатить без сдачи любую сумму, начиная с 8 тугриков.

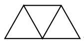
$\boxed{\mathbf{4}}$ Докажите, что квадрат можно разбить на любое число квадратов (не обязательно равных), большее пяти.

Иногда удобно делать шаги «сверху вниз»: начать с объекта на $(n+1)$-й «ступеньке» (про который мы хотим доказать) и посмотреть, с каким объектом на одной из предыдущих ступенек (про который уже все доказано по предположению) он связан.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Докажите, что любое натуральное число n представимо в виде суммы различных степеней двойки (не забудьте, что $1 = 2^0$).

$\boxed{\mathbf{6}}$ Вокруг города проходит кольцевая дорога с односторонним движением, и через город от края до края проходит несколько магистралей с односторонним движением. Докажите, что есть такой квартал (не разбитый магистралями на части), вокруг которого можно объехать, не нарушая правил.

Зачетные задачи

1 Треугольник со стороной 2^n разбили на единичные треугольнички и затем отрезали треугольничек в одной из вершин. Докажите, что оставшуюся часть можно разделить на трапеции из трех треугольничков .

2 Двум логикам написали на лбу по натуральному числу, а вслух сообщили, что числа отличаются на 2. Далее их по очереди много раз спрашивают, знают ли они свое число, и те вслух говорят «Да» или «Нет». Докажите, что рано или поздно кто-то скажет «Да».

3 В нескольких местах кольцевой дороги стоят автомобили. Если весь бензин, имеющийся в их баках, слить в одну машину, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге до своего прежнего места.

a Докажите, что хотя бы одна машина сможет доехать до следующей за ней по часовой стрелке.

b Докажите, что хотя бы одна машина может объехать все кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.

Дополнительные задачи

4 «Трилистником» называется фигура из трех лучей, выходящих из одной точки. На плоскости нарисовали несколько трилистников, они разбили плоскость на несколько частей. (Никакие два луча из разных трилистников не накладываются друг на друга.) Докажите, что можно раскрасить эти части в три цвета так, чтобы одноцветные части не имели общих отрезков границы.

5 В поселке 100 домов. Какое наибольшее число замкнутых не пересекающихся заборов можно построить, чтобы каждый забор огораживал хотя бы один дом и никакие два забора не огораживали бы одну и ту же совокупность домов?

6 Анна Алексеевна изобрела прибор, который может поделить любой отрезок пополам или в отношении $n:(n+1)$ (n – произвольное натуральное число). Олег Алексеевич придумал два натуральных числа a и b. Правда ли, что с помощью своего прибора Анна Алексеевна обязательно сможет поделить отрезок в отношении $a:b$?

7 Можно ли отметить на плоскости несколько точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой отмеченной точки находилось ровно 10 отмеченных?