

8В, спецкурс, занятие 14

15 декабря 2023

Теория вероятностей и комбинаторика

1 Анна Алексеевна выставляет оценки 15 ученикам 8ВМ. Каждому ученику она с равной вероятностью ставит двойку, тройку, четверку или пятерку. (Оценки разных учеников независимы.) С какой вероятностью хотя бы кто-то получит двойку?

Решение: можно попробовать рисовать дерево. Первый получит двойку с вероятностью $\frac{1}{4}$. Первый не получит двойку, а второй получит с вероятностью $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$. Первые двое не получают двойку, а третий получит с вероятностью $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$. И так далее. Общую вероятность можно найти как сумму

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{14} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{14} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{15}}{1 - \frac{3}{4}} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{15}. \end{aligned}$$

Решение 2: эту задачу можно решить гораздо проще. Вычислим вероятность того, что никто не получит двойку. Каждый из учеников получает не двойку с вероятностью $\frac{3}{4}$, тогда все 15 обойдутся без двоек с вероятностью $\left(\frac{3}{4}\right)^{15}$. А хотя бы кто-то получит двойку с вероятностью $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{15}$.

Идея, используемая в решении 2, очень важная. Часто бывает, что вычислить вероятность события A сложно, а вероятность события «не A » — намного проще. В этом случае можно воспользоваться формулой $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

1] Есть три мешка, в каждом из которых лежит 10 шаров с номерами от 0 до 9. Из каждого мешка случайным образом вытаскивают по одному шару. С какой вероятностью все три номера на шарах будут разными?

2] Монету бросили 10 раз подряд. С какой вероятностью выпало ровно 4 орла?

3] В ящике имеется 10 белых и 15 черных шаров. Из ящика вынимаются 4 шара.

a] Найдите вероятность того, что все вынутые шары будут белыми.

b] Найдите вероятность того, что вытащили три белых и один черный шар.

4] Герман тянет три карты из тщательно перемешанной колоды (52 карты). С какой вероятностью он вытянет тройку, семёрку и туза (любых мастей):

a] именно в таком порядке;

b] в произвольном порядке?

c] С какой вероятностью он вытянет тройку, семёрку и пиковую даму (в произвольном порядке)?

5] В классе 24 человека, из них 10 девочек и 14 мальчиков. По сигналу учителя физкультуры они быстро построились в одну шеренгу в случайном порядке. Найдите вероятность того, что на концах шеренги будут стоять школьники одинакового пола.

6] В классе 23 человека. С какой вероятностью хотя бы у двух школьников в этом классе дни рождения совпадают? (Сначала запишите точное выражение, а затем вычислите его приближительное значение.)

7] Из полной колоды карт (52 карты) Вася вытянул наугад 10 карт.

a] С какой вероятностью среди них есть хотя бы один туз?

b] Известно, что у Васи есть туз. С какой вероятностью у него есть и второй туз?

c] Известно, что у Васи есть туз пик. С какой вероятностью у него есть и второй туз?

(Во всех пунктах сначала запишите точное выражение, а затем вычислите его приближительное значение.)

В номерах 6 и 7 можете написать скрипт на Питоне или воспользоваться Wolfram Alpha, команда $\text{binom}(n, k)$ вам в помощь.

8] Монету бросают 10 раз. Какова вероятность того, что ни разу не случится две решки подряд?

9] Король Артур проводит рыцарский турнир по олимпийской системе (в каждом туре рыцари разбиваются на пары и бьются друг с другом, проигравший выбывает). Среди 2^n одинаково искусных рыцарей есть два близнеца. С какой вероятностью они встретятся в финале?