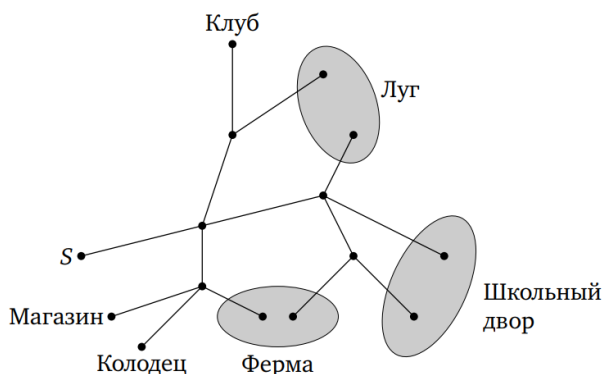


Теория вероятностей-2. Условная вероятность.

-2 На рисунке показана схема тропинок в парке. Анна Алексеевна начинает прогулку из точки S , на каждой развилке выбирает дальнейший путь случайным образом с равными вероятностями и гуляет до тех пор, пока тропинка не кончится. Еще известно, что она нигде не поворачивает назад. Найдите вероятность того, что Анна Алексеевна: **a** придёт к магазину; **b** придёт на луг; **c** придёт на ферму; **d** придёт в клуб или на школьный двор.



Если во время вероятностного эксперимента случайные события происходят последовательно, одно за другим, то вероятностное пространство этого эксперимента бывает удобно изображать в виде дерева.

Листья этого дерева соответствуют элементарным исходам. На каждом ребре пишется вероятность пройти по нему. Вероятность каждого исхода равна произведению вероятностей на ведущих к нему ребрах.

Определение. События B_1, B_2, \dots, B_k образуют *полную систему событий*, если в результате эксперимента обязательно происходит ровно одно из них.

В частности, события B и \bar{B} образуют полную систему.

Определение. *Условной вероятностью* $P(A|B)$ называется вероятность наступления события A при условии, что событие B уже наступило. Она равняется отношению вероятности одновременного наступления A и B к вероятности B .

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

-1 25% автомобильных фонарей изготавливают на заводе в городе Е. Остальные – на заводе в г. К. В городе Е. в среднем случается 8% брака, а в городе К. в среднем 4% брака.

a С какой вероятностью случайный фонарь окажется бракованным?

b Известно, что покупатель Иванов приобрел бракованный фонарь. Чему теперь равна вероятность того, что этот фонарь изготовлен в Е.?

c Известно, что покупатель Петров приобрел хороший фонарь. Чему теперь равна вероятность того, что этот фонарь изготовлен в К.?

0 Известно, что в семье двое детей. Какова вероятность того, что в семье два мальчика, если известно, что один из детей: **a** мальчик; **b** мальчик, родившийся в понедельник?

1^v Докажите, что события A и B независимы, если $P(A | B) = P(A)$.

2^v Симметричную монету подбрасывают три раза. Найдите вероятность того, что выпал ровно один орёл, если известно, что не все три раза выпал орёл.

3 На столе лежат три коробки. В первой два чёрных шара, во второй два белых шара, а в третьей один чёрный и один белый. Открыли случайную коробку и из неё вынули случайный шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что в открытой коробке остался тоже белый шар?

4 (*Формула полной вероятности*) Пусть B_1, B_2, \dots, B_k — полная система событий и A — какое-то событие. Докажите, что

$$P(A) = P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + \dots + P(A | B_k)P(B_k).$$

5^v Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 95% яиц из первого хозяйства и 20% яиц из второго хозяйства — яйца высшей категории. Всего высшую категорию получает 65% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Указание: пусть эта вероятность равна p . Нарисуйте дерево эксперимента, а затем составьте и решите уравнение на p .

6 (*Формула Байеса*) Пусть A и B — какие-то события. Докажите, что

$$P(B | A) = \frac{P(A | B) \cdot P(B)}{P(A)}.$$

7 Ужасной болезнью «спидорак» болеет в среднем 1 человек из 10000. У новейших тестов на спидорак вероятность ложноположительного результата равна 5% (то есть 5% здоровых людей тест показывает, что они больны), а вероятность ложноотрицательного результата равна 0,1% (то есть у 0,1% больных людей тест заболевание не выявляет). Тест показал положительный результат. С какой вероятностью человек на самом деле болен спидоракком?

8 Ровно половина населения острова Невезения — зайцы, а остальные — кролики. Жители острова никогда не лгут сознательно, но могут добросовестно заблуждаться. Зайцы добросовестно заблуждаются в среднем в каждом четвертом случае, а кролики добросовестно заблуждаются в среднем в каждом третьем случае.

Однажды в центр острова вышел зверь и закричал: «Я не заяц!» Через некоторое время он грустно сказал: «Я не кролик». Какова вероятность того, что он всё же заяц?

9 Вероятность рождения двойняшек в Швамбрании равна p , тройняшки в Швамбрании не рождаются. В семье швамбранского премьер-министра трое детей. Какова вероятность того, что среди них есть пара двойняшек?

10 Каждый из n пассажиров купил место в n -местном самолете. Первым в салон вошел Человек Рассеянный и сел на случайное место. Каждый следующий пассажир садился на свое место, если оно было свободно, а в противном случае занимал случайное место. С какой вероятностью последний пассажир сел на свое место?

a) Решите задачу для $n = 2, 3, 4$.

b★ Решите задачу в общем случае.