8В, спецкурс, занятие 11
24 ноября 2023
Формула включений-исключений

Предложение. Мощность объединения множеств A и B можно найти по формуле

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Предложение. Мощность объединения множеств A, B и C можно найти по формуле

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Доказательство 1:

$$|(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| =$$

$$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|) =$$
$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Доказательство 2: несложно убедиться, что каждый элемент объединения считается в выражении справа по одному разу.

Теорема (формула включений-исключений)**.** Для n множеств A_1, A_2, ..., A_n верна формула:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| -$$
$$-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| +$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| - \dots$$
$$+(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

То есть мощность объединения n множеств можно найти, сложив мощности этих множеств, вычтя из них мощности всех двойных пересечений, прибавив мощности тройных пересечений, вычтя мощности четверных пересечений, и так далее.

Доказательство 1: индукцией по числу множеств, аналогично переходу от двух множеств к трем (неприятно).

Доказательство 2: Докажем, что в выражении

$$|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| +$$

$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| - \dots$$
$$+(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

любой элемент из объединения множеств считается ровно один раз. Рассмотрим произвольный элемент x, пусть он принадлежит ровно k множествам. То есть $x \in A_{i_1}$, A_{i_2}, ..., A_{i_k}, а остальным множествам x не принадлежит.

Получается, что x принадлежит C_k^1 одинарным множествам, C_k^2 двойным пересечениям (так как есть C_k^2 пар из k множеств), C_k^3 тройным пересечениям и так далее. Тогда x считается ровно $C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 - \dots \pm C_k^k$ раз.

В прошлом листочке было доказано, что в k-элементном множестве поровну подмножеств с четным и нечетным количеством элементов. Поэтому $C_k^0 - C_k^1 + C_k^2 - \dots \pm C_k^k = 0$. А так как $C_k^0 = 1$, то элемент x считается ровно один раз, что и требовалось доказать.

$\boxed{\mathbf{1}^{\vee}}$ В летнем лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?

$\boxed{\mathbf{2}^{\vee}}$ $\boxed{\text{a}}$ Сколько чисел от 1 до 1000 не делятся ни на 3, ни на 5?

$\boxed{\text{b}}$ Сколько чисел от 1 до 1000 не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Куб со стороной 20 разбит на 8000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трёх направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1\times20\times20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоёв.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Пол комнаты площадью 6 м^2 покрыт тремя коврами, площадь каждого из которых равна 3 м^2. Докажите, что какие-то два из этих ковров перекрываются по площади, не меньшей 1 м^2.

$\boxed{\mathbf{5}}$ В равностороннем треугольнике ABC каждая сторона поделена семью точками на восемь равных отрезков. Катя выбирает по одной точке деления на каждой из сторон и рисует треугольник с вершинами в этих точках. Сколькими способами она может выбрать эти точки так, чтобы у получившегося треугольника ни одна сторона не была параллельна ни одной из сторон треугольника ABC.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Сколькими способами можно расселить 15 гостей в четырёх комнатах, если требуется, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

$\boxed{\mathbf{7}}$ В классе 26 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на своё место?

$\boxed{\mathbf{8}}$ *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ считает количество чисел в ряду $1, 2, \ldots, n$, взаимно простых с n. (Например, среди чисел от 1 до 6 только 1 и 5 взаимно просты с 6. Поэтому $\varphi(6)=2$.)

$\boxed{\text{a}}$ Пусть p — простое число. Найдите $\varphi(p)$.

$\boxed{\text{b}}$ Пусть p — простое число. Сколько из чисел $1, 2, \ldots p^a$ делятся на p? Найдите $\varphi(p^a)$.

$\boxed{\text{c}}$ Пусть p и q — простые числа. Сколько из чисел $1, 2, \ldots, p^a q^b$ делятся на p? на q? на pq? Найдите $\varphi(p^a q^b)$.

$\boxed{\text{d}}$ Пусть $n=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$. Докажите, что

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_m}\right).$$

$\boxed{\mathbf{9}^{\star}}$ Пусть есть n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Для элемента x существует 2^n вариантов, каким из этих множеств он принадлежит, а каким — нет. Для $n=3$ есть привычная нам картинка из трех кругов Эйлера. Они разбивают плоскость на 8 частей, и каждая часть как раз соответствует одному из 8 вариантов.

А можно ли нарисовать обладающие аналогичным свойством «круги Эйлера» (они должны быть замкнутыми кривыми, но не обязательно кругами) для произвольного числа множеств?