# 8ВМ, спецкурс, занятие 10
## 17 ноября 2023
# *Подмножества*

Множества (в том чисел пустые) могут быть элементами другого множества. Например, элементами множества $\{3, 4, \{7, 12, 29\}, \varnothing\}$ являются числа 3 и 4, трехэлементное множество $\{7, 12, 29\}$ и пустое множество $\varnothing$.

Количество элементов в множестве $A$ называется *мощностью* $A$ и обозначается через $|A|$. Например, $|\{3, 4, \{7, 12, 29\}, \varnothing\}| = 4$.

Множества $A$ и $B$ *равномощны*, если их мощности равны. Доказать равномощность можно, установив *взаимно-однозначное соответствие* между элементами $A$ и $B$.

Множество $B$ является *подмножеством* множества $A$ (обозначается $B \subset A$), если все элементы множества $B$ принадлежат и множеству $A$.

**Предложение.** Свойства подмножеств:
- $A \subset A$;
- $\varnothing \subset A$ для всех $A$.
- если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$;
- $A = B$ в том и только том случае, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

**Задача 1.** Восемь преподавателей с плохой памятью на лица привезли на турнир матбоёв 27 школьников. Любые трое преподавателей могут, объединившись, идентифицировать всех этих школьников. Докажите, что какие-то двое из них тоже справятся с этим.

**Решение.** Рассматриваем множество всех школьников $S$. Для каждого преподавателя $i$ рассматриваем подмножество $N_i \subset S$ тех школьников, которых он <u>не</u> знает. Пересечение любых трех таких подмножеств пусто (иначе соответствующие три преподавателя кого-то не узнали бы). Значит, любой элемент принадлежит не более чем двум подмножествам $N_i$.

Рассмотрим всевозможные пересечения $N_i \cap N_j$, их всего $C_8^2 = 28$. Никакие два из них не пересекаются. Но школьников всего 27, поэтому какое-то из этих пересечений пусто. Соответствующие два преподавателя всех узнают.

**Задача 2.** В некоторой школе было проведено 44 олимпиады, на каждой из которых наградили ровно 7 победителей. Оказалось, что для любых двух олимпиад был ровно один школьник, ставший победителем обеих. Докажите, что был школьник, ставший победителем всех 44 олимпиад.

**Решение.** Рассмотрим множество школьников $S$. Каждая олимпиада задает 7-элементное подмножество победителей $W_i \subset S$. Любые два подмножества пересекаются ровно по одному элементу: $|W_i \cap W_j| = 1$. Подмножества с таким свойством удобно изображать прямыми на плоскости, так что дальше мы их будем называть «прямыми».

Рассмотрим «прямую» $W_{44}$. На ней 7 точек, каждая из оставшихся 43 прямых проходит через одну из этих точек. По принципу Дирихле, через какую-то точку $a \in W_{44}$ проходит минимум 8 прямых (сама $W_{44}$ и еще 7 других). Если через нее проходят все прямые, то это победа. Если какая-то прямая $W_i$ через $a$ не проходит, то она пересекает каждую из этих 8 прямых, причем каждую в своей точке. Но тогда на $W_i$ минимум 8 точек, противоречие.

**1**$^{\vee}$ Какие из следующих множеств являются подмножествами друг друга?

$$A = \{1\};\ B = \{1, 2\};\ C = \{1, 2, 3\};\ D = \{\{1, 2\}, 3\};\ E = \{1, \{2\}, 3\};$$

$$F = \{\{2, 1\}\};\ X = \varnothing;\ Y = \{\varnothing\}$$

**2**$^{\vee}$ Выпишите все подмножества следующих множеств:
a $\varnothing$; b $\{1\}$; c $\{1, 2\}$; d $\{1, 2, 3\}$; e $\{\{1\}, 2, 3\}$;
f $\{\{1, 2\}, 3\}$; g $\{\varnothing\}$; h $\{\{2, 1\}\}$.

**3**$^{\vee}$ a Каких подмножеств в 58-элементном множестве больше: с 15 элементами или с 43 элементами?

b Каких подмножеств в множестве $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ больше: содержащих 1 или не содержащих 1?

c Докажите, что в множестве $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ подмножеств с четным и с нечетным числом элементов поровну.

**4** a Сколько подмножеств у множества с $n$ элементами?

b Выписали все возможные подмножества множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ и сложили их мощности. Что получилось?

*Ответы в виде длинных сумм не принимаются.*

**5** Анна Алексеевна записала все возможные группировки учеников 8В (группировка может состоять даже из одного человека, но весь класс – это не группировка). Каждый день какая-то одна группировка дерется против какой-то другой группировки (естественно, в них не должно быть общих учеников). В некоторый момент оказалось, что каждая возможная группировка дралась ровно один раз.

Докажите, что каждый день в драке участвовали все ученики 8В.

Подсказка: разберитесь сначала с большими группировками.

**6** В парламенте 2023 комитета, каждый депутат входит хотя бы в один комитет. В каждом комитете по 45 человек, а если собрать любую пару комитетов, то придет ровно 89 человек. Сколько всего депутатов в парламенте?

**7** На конгресс приехало 100 учёных, каждый знает три языка. Оказалось, что любые четверо из них могут общаться на одном языке. Докажите, что и любые пятеро из них могут общаться на одном языке.

**8** Учителя школы провели 40 педсоветов, на каждый пришло по 10 человек. Оказалось, что любые два учителя встретились максимум на одном педсовете. Докажите, что учителей в школе больше 60.

Подсказка: посчитайте общее количество встреч.

**9**$^{\star}$ В 12-элементном множестве выбрали 2048 подмножеств. Любые три из них имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.