8ВМ, спецкурс, занятие 9
10 ноября 2023

Множества и операции на них

В математике *множество* — неопределяемое понятие. Неформально можно сказать, что множество — это набор отдельных *элементов*, рассматриваемый как единое целое.

Элементы множества перечисляются в фигурных скобках: $A=\{a, x_3, 5, \pi, \clubsuit\}$. *Пустое множество*, в котором нет элементов, обозначается $\varnothing$ (без скобок).

Если элемент x *принадлежит* множеству A, это записывается как $x\in A$ (а если нет — $x\notin A$).

Множества A и B *равны* ($A=B$), если они состоят из одних и тех же элементов.

Определение.

• *Объединением множеств* A и B называется множество таких x, что $x\in A$ или $x\in B$. Его обозначают $A\cup B$.

• *Пересечением множеств* A и B называется множество таких x, что $x\in A$ и $x\in B$. Его обозначают $A\cap B$.

• *Разностью множеств* A и B называется множество таких x, что $x\in A$ и $x\notin B$. Ее обозначают $A\setminus B$.

• Пусть все множества, рассматриваемые в данной задаче, являются подмножествами какого-то «объемлющего» множества X (например, если мы рассматриваем различные множества натуральных чисел, то $X=\mathbb{N}$). Тогда *дополнением множества* A называется множество таких $x\in X$, что $x\notin A$. Его обозначают $\overline{A}$.

Предложение. Простейшие свойства операций на множествах:
- $A\cap\varnothing=\varnothing$, $A\cup\varnothing=A$;
- $A\cap A=A$, $A\cup A=A$, $A\setminus A=\varnothing$;
- $A\cap B=B\cap A$, $A\cup B=B\cup A$;
- $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$, $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

Доказывать такие тождества проще всего при помощи кругов Эйлера.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Докажите, что

$\boxed{\text{a}}$ $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$; $\boxed{\text{b}}$ $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;
$\boxed{\text{c}}$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; $\boxed{\text{d}}$ $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

<u>Замечание:</u> Тождества c) и d) называются *законами де Моргана.*

$\boxed{\mathbf{2}}$ Какие из следующих равенств являются тождествами?

$\boxed{\text{a}}$ $(A\cup B)\cap C=A\cap(B\cup C)$; $\boxed{\text{b}}$ $(A\cap B)\cup C=A\cup(B\cap C)$;
$\boxed{\text{c}}$ $(A\setminus B)\cup B=A$; $\boxed{\text{d}}$ $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\cup B$;
$\boxed{\text{e}}$ $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$; $\boxed{\text{f}}$ $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;
$\boxed{\text{g}}$ $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$; $\boxed{\text{h}}$ $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\boxed{\text{a}}$ Можно ли записать пересечение двух множеств, используя только операции разности и объединения?

$\boxed{\text{b}}$ Можно ли записать разность двух множеств, используя только операции пересечения и объединения?