

8В, спецкурс

Зачет 13 ноября 2023. Программа.

Зачет письменный, продолжительность 60 минут. В билете 1 теоретический вопрос, 1 задача из списка, 2 новые задачи.

Список теоретических вопросов

- 1 Принцип математической индукции (формулировка).
- 2 Принцип наименьшего элемента (формулировка).
- 3 Делимость нацело, деление с остатком (определения).
- 4 Определение НОДа. $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b) = \text{НОД}(r, b)$, где r – остаток от деления a на b (доказательство).
- 5 Что делают прямой и обратный алгоритмы Евклида?
- 6 Лемма Евклида (формулировка и доказательство).
- 7 Основная теорема арифметики (формулировка, доказательство существования разложения).
- 8 Основная теорема арифметики (формулировка, доказательство единственности разложения).

Список задач (числа и формулировки могут быть незначительно изменены)

- 1 Из квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали произвольную клетку. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки.
- 2 **Ханойская башня.** Есть три стержня, на один из них надета пирамидка из n колец. Кольца можно по одному переносить со стержня на стержень, причем большие кольца нельзя класть на меньшие. Докажите, что можно переместить всю пирамидку с одного стержня на другой за $2^n - 1$ ход.
- 3 Вокруг города проходит кольцевая дорога с односторонним движением, и через город от края до края проходит несколько магистралей с односторонним движением. Докажите, что есть такой квартал (не разбитый магистралями на части), вокруг которого можно объехать, не нарушая правил.
- 4 Докажите, что не существует таких натуральных x, y, z , что $9x^3 + 3y^3 = z^3$.
- 5 Докажите, что $a \cdot b = \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}[a, b]$.
- 6 Найдите наименьшее такое число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 — остаток 2, при делении на 4 — остаток 3, ..., при делении на 10 — остаток 9.
- 7 Число n не является точным квадратом. Докажите, что не существует таких натуральных чисел x и y , что $x^2 = ny^2$.
- 8 Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Найдите количество делителей числа n .

Что нужно уметь делать

- 1 Задавать последовательности формулами и рекуррентно. В частности, последовательности с чередованием: $2, 5, 2, 5, 2, 5 \dots$
- 2 Доказывать формулы по индукции.
- 3 Доказывать по индукции, что рекуррентное соотношение и формула задают одну и ту же последовательность.
- 4 Находить НОД двух чисел по алгоритму Евклида.
- 5 Применять алгоритм Евклида к выражениям с переменными.
- 6 Выражать $\text{НОД}(a, b)$ через a и b по обратному алгоритму Евклида.
- 7 Находить целые решения линейных диофантовых уравнений $ax + by = c$.
- 8 Отбирать из этих решений натуральные.