

# 8В, спецкурс, занятие 1

4 сентября 2023

## Последовательности

Последовательности записываются при помощи нижних индексов:  $a_1, a_2, a_3, \dots$

Через  $a_n$  обозначается элемент последовательности с номером  $n$ .

Последовательность можно задать разными способами:

- Выписав первые несколько ее членов. Например, 1, 4, 9, 16, 25, 36,  $\dots$
- Описанием. Например, «последовательность квадратов натуральных чисел».
- Формулой. Например,  $a_n = n^2$ .
- Рекуррентно, то есть выражая каждый следующий член последовательности через предыдущие. В этом случае обязательно нужно указать один или несколько первых членов. Например,  $a_1 = 1$  и  $a_{n+1} = a_n + (2n + 1)$ .

**1** Задайте последовательность формулой:

- a** 4, 5, 6, 7, 8, 9,  $\dots$
- b** 9, 27, 81, 243, 729,  $\dots$
- c** 1, 3, 6, 10, 15,  $\dots$
- d**  $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$
- e** 17, 27, 47, 87, 167, 327,  $\dots$

**2** Задайте последовательность рекуррентно:

- a** 3, 3, 3, 3, 3, 3,  $\dots$
- b** 1543, 1545, 1547, 1549,  $\dots$
- c** 1, 2, 6, 24, 120,  $\dots$
- d** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,  $\dots$
- e** 0,3, 0,33, 0,333, 0,3333, 0,33333  $\dots$

**3** Последовательность задана рекуррентно:  $s_1 = 1, s_{n+1} = |2s_n - 11|$ .

Найдите  $s_{1543}$ .

**4** Саша посмотрел на свои оценки по алгебре и ужаснулся: 5, 2, 5, 2, 5, 2,  $\dots$

Задайте последовательность его текущих (и ожидаемых в будущем) оценок

- a** рекуррентно; **b** формулой.

**5** Верно ли, что рекуррентное соотношение  $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$  задает ту же последовательность, что и формула  $a_n = 3^n - 2^n$ ?

**6** **a** Пусть  $p_n$  — количество способов разрезать полоску  $1 \times n$  на квадратики  $1 \times 1$  и доминошки  $1 \times 2$ . Задайте последовательность  $p_1, p_2, p_3, \dots$  рекуррентно.

**b** Докажите, что число способов разрезать прямоугольник  $2 \times n$  на доминошки  $1 \times 2$  тоже равно  $p_n$ .

**c** Докажите, что число «слов» длины  $n$  из букв У и Ы, не содержащих двух букв Ы подряд, равно  $p_{n+1}$ .

**7** Пусть  $t_n$  — число способов разрезать прямоугольник  $3 \times n$  на полоски  $1 \times 3$ .

Найдите  $t_{15}$ .

**8★** Последовательность определяется так: первые её члены — 1, 2, 3, 4, 5. Далее каждый следующий (начиная с 6-го) равен произведению всех предыдущих членов минус 1. Докажите, что сумма квадратов первых 70 членов последовательности равна их произведению.

# 8В, спецкурс, занятие 1

4 сентября 2023

## Последовательности

Последовательности записываются при помощи нижних индексов:  $a_1, a_2, a_3, \dots$

Через  $a_n$  обозначается элемент последовательности с номером  $n$ .

Последовательность можно задать разными способами:

- Выписав первые несколько ее членов. Например, 1, 4, 9, 16, 25, 36,  $\dots$
- Описанием. Например, «последовательность квадратов натуральных чисел».
- Формулой. Например,  $a_n = n^2$ .
- Рекуррентно, то есть выражая каждый следующий член последовательности через предыдущие. В этом случае обязательно нужно указать один или несколько первых членов. Например,  $a_1 = 1$  и  $a_{n+1} = a_n + (2n + 1)$ .

**1** Задайте последовательность формулой:

- a** 4, 5, 6, 7, 8, 9,  $\dots$
- b** 9, 27, 81, 243, 729,  $\dots$
- c** 1, 3, 6, 10, 15,  $\dots$
- d**  $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$
- e** 17, 27, 47, 87, 167, 327,  $\dots$

**2** Задайте последовательность рекуррентно:

- a** 3, 3, 3, 3, 3, 3,  $\dots$
- b** 1543, 1545, 1547, 1549,  $\dots$
- c** 1, 2, 6, 24, 120,  $\dots$
- d** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,  $\dots$
- e** 0,3, 0,33, 0,333, 0,3333, 0,33333  $\dots$

**3** Последовательность задана рекуррентно:  $s_1 = 1, s_{n+1} = |2s_n - 11|$ .

Найдите  $s_{1543}$ .

**4** Саша посмотрел на свои оценки по алгебре и ужаснулся: 5, 2, 5, 2, 5, 2,  $\dots$

Задайте последовательность его текущих (и ожидаемых в будущем) оценок

- a** рекуррентно; **b** формулой.

**5** Верно ли, что рекуррентное соотношение  $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$

задает ту же последовательность, что и формула  $a_n = 3^n - 2^n$ ?

**6** **a** Пусть  $p_n$  — количество способов разрезать полоску  $1 \times n$  на квадратики  $1 \times 1$  и доминошки  $1 \times 2$ . Задайте последовательность  $p_1, p_2, p_3, \dots$  рекуррентно.

**b** Докажите, что число способов разрезать прямоугольник  $2 \times n$  на доминошки  $1 \times 2$  тоже равно  $p_n$ .

**c** Докажите, что число «слов» длины  $n$  из букв У и Ы, не содержащих двух букв Ы подряд, равно  $p_{n+1}$ .

**7** Пусть  $t_n$  — число способов разрезать прямоугольник  $3 \times n$  на полоски  $1 \times 3$ .

Найдите  $t_{15}$ .

**8★** Последовательность определяется так: первые её члены — 1, 2, 3, 4, 5. Далее

каждый следующий (начиная с 6-го) равен произведению всех предыдущих членов минус 1. Докажите, что сумма квадратов первых 70 членов последовательности равна их произведению.