

8 математический класс 1543. Алгебра.
12/13 сентября 2023

1 Пусть некоторый многочлен делится без остатка на двучлен $x - 1543$. Какое значение принимает этот многочлен при $x = 1543$?

Определение. Пусть правая часть уравнения равна нулю, а в левой записан многочлен. Корни такого уравнения называются *корнями многочлена*.

Теорема (Безу). Число a является корнем многочлена тогда и только тогда, когда этот многочлен делится на $x - a$ без остатка.

2 Делится ли многочлен $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x + 12$ без остатка на:

a $x + 1$; **b** $x - 3$; **c** $x + 4$; **d** $x^2 - 2x - 3$; **e** $x^2 + 5x + 4$?

3 При каком значении k выполняется без остатка деление $x^3 + 6x^2 + kx + 12$ на $x + 4$?

4 Найдите такие a и b , чтобы многочлен $x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$ делился на $x^2 - 1$ без остатка.

5 Решите уравнение, если известны некоторые его корни:

a $x^2 - 9x + 20 = 0$, если $x_1 = 4$; **b** $x^3 + 5x^2 - 12x - 36 = 0$, если $x_1 = 3, x_2 = -2$.

6 Разделится ли без остатка: **a** $x^n - 1$ на $x - 1$; **b** $x^{2n+1} + 1$ на $x + 1$; **c** $x^{2n} + 1$ на $x + 1$?

Выполните деление столбиком (только там, где остатка не ожидается) и запомните полученные формулы.

7 Разложите на множители: **a** $x^3 + x^2 + x - 3$; **b** $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5$;

c $x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x - 100$.

8 Угадайте корень многочлена и разложите на множители:

a $x^2 - 2023x - 2024$; **b** $x^3 - 6x^2 + 9x - 4$; **c** $x^3 - x^2 - 3x + 2$.

Теорема (Безу+). При делении многочлена $P(x)$ с остатком на $(x - a)$, в остатке получится число $P(a)$:

$$P(x) = (x - a)Q(x) + P(a).$$

9 Найдите остаток от деления $x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$ на $x + 1$.

10 Многочлен $P(x)$ дает остаток 1 при делении на $x - 2$ и остаток 2 при делении на $x - 1$. Какой остаток дает этот многочлен при делении на $x^2 - 3x + 2$?

Подсказка: этот остаток не будет числом.

11 Найдите остаток от деления $x^{2023} + 3x + 2$ на $x^2 - 1$.

12* Докажите тождество, не проделывая сложных вычислений (в частности, не надо раскрывать скобки).

$$(x + 5)(x - 1)(y + 3) + (y + 5)(y - 1)(z + 3) + (z + 5)(z - 1)(x + 3) - (x + 5)(x - 1)(z + 3) - (y + 5)(y - 1)(x + 3) - (z + 5)(z - 1)(y + 3) = (x - z)(z - y)(y - x)$$

Домашнее задание. 12/13 сентября → 15 сентября

1 Разделите в столбик с остатком $3x^6 + 11x^5 - 4x^4 + 7x^3 + 29x^2 + 2x - 5$ на $x + 4$

2 Не деля в столбик, выясните, делится ли многочлен $x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - x - 5$ без остатка на **a** $x - 1$; **b** $x^2 - 3x + 2$.

3 При каких значениях a и b многочлен $5x^3 + ax^2 + bx + 3$ делится на $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$?

4 У уравнения $x^4 - 4x^3 - 25x^2 + 16x + 84 = 0$ известны два корня: $x_1 = -3, x_2 = 7$. Решите его.

5 Разложите на множители $x^6 - 2x + 1$.