

## 8 математический класс 1543. Алгебра. 30 января 2024.

**1** Найдите наименьшее значение выражения  $\frac{(3x-8)(2x-3)}{x}$  при  $x > 0$ .

**2** Для  $a > 0$  докажите неравенства. Может быть полезно разложить одно слагаемое на два.

**а**  $\frac{a+4}{2} + \frac{a+2}{4} + \frac{6}{a} > 6,5$ ;    **б**  $a^{10} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{a} \geq 8$ ;    **в**  $a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 16$ .

**3** Докажите *неравенство о трех квадратах*:  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$  для любых значений переменных. Когда достигается равенство?

**4** Докажите неравенства:

**а**  $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ ;    **б**  $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$ ;

**в**  $\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{b}{c}\right)^4 + \left(\frac{c}{a}\right)^4 \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ ;    **г**  $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a+b+c$  при  $a, b, c > 0$ .

**5** Докажите неравенство  $\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq 3$ .

**6\*** Для положительных  $a, b, c$  докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{1}{b^2+c^2+2a^2} + \frac{1}{c^2+a^2+2b^2} \leq \frac{1}{a^2+b^2+2ab} + \frac{1}{b^2+c^2+2bc} + \frac{1}{c^2+a^2+2ca}.$$

## 8 математический класс 1543. Алгебра. 30 января 2024.

**1** Найдите наименьшее значение выражения  $\frac{(3x-8)(2x-3)}{x}$  при  $x > 0$ .

**2** Для  $a > 0$  докажите неравенства. Может быть полезно разложить одно слагаемое на два.

**а**  $\frac{a+4}{2} + \frac{a+2}{4} + \frac{6}{a} > 6,5$ ;    **б**  $a^{10} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{a} \geq 8$ ;    **в**  $a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 16$ .

**3** Докажите *неравенство о трех квадратах*:  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$  для любых значений переменных. Когда достигается равенство?

**4** Докажите неравенства:

**а**  $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ ;    **б**  $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$ ;

**в**  $\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{b}{c}\right)^4 + \left(\frac{c}{a}\right)^4 \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ ;    **г**  $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a+b+c$  при  $a, b, c > 0$ .

**5** Докажите неравенство  $\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq 3$ .

**6\*** Для положительных  $a, b, c$  докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{1}{b^2+c^2+2a^2} + \frac{1}{c^2+a^2+2b^2} \leq \frac{1}{a^2+b^2+2ab} + \frac{1}{b^2+c^2+2bc} + \frac{1}{c^2+a^2+2ca}.$$

## Домашнее задание. 30/31 января → 2 февраля

- 1 Положительно или отрицательно число  $\sqrt{7} + 2\sqrt{3} - \sqrt{14} - 3$ ?
- 2 Найдите наименьшее значение выражения  $\frac{(x+6)(3x+32)}{x}$  при  $x > 0$ . Когда оно достигается?
- 3 Докажите неравенства:
- а  $\frac{b+c+d}{a} + \frac{a+c+d}{b} + \frac{a+b+d}{c} + \frac{a+b+c}{d} \geq 12$  при  $a, b, c, d > 0$ . б  $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq \frac{ab+ac+bc}{3}$ ;
- в  $\left(\frac{bc}{a}\right)^4 + \left(\frac{ac}{b}\right)^4 + \left(\frac{ab}{c}\right)^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab$ .
- 4 В двух одинаковых сосудах, объемом по 30 л каждый, содержится суммарно 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько спирта было первоначально в каждом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом?

## Домашнее задание. 30/31 января → 2 февраля

- 1 Положительно или отрицательно число  $\sqrt{7} + 2\sqrt{3} - \sqrt{14} - 3$ ?
- 2 Найдите наименьшее значение выражения  $\frac{(x+6)(3x+32)}{x}$  при  $x > 0$ . Когда оно достигается?
- 3 Докажите неравенства:
- а  $\frac{b+c+d}{a} + \frac{a+c+d}{b} + \frac{a+b+d}{c} + \frac{a+b+c}{d} \geq 12$  при  $a, b, c, d > 0$ . б  $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq \frac{ab+ac+bc}{3}$ ;
- в  $\left(\frac{bc}{a}\right)^4 + \left(\frac{ac}{b}\right)^4 + \left(\frac{ab}{c}\right)^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab$ .
- 4 В двух одинаковых сосудах, объемом по 30 л каждый, содержится суммарно 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько спирта было первоначально в каждом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом?