8 математический класс 1543. Алгебра. 26 января 2023.

• *Неравенство о средних*: для любых неотрицательных a, b выполняется $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. То есть *среднее геометрическое* двух чисел не больше их *среднего арифметического*. Равенство достигается только при $a=b$.

• $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ для неотрицательных a, b;

• $a^2+b^2 \geq 2ab$ для любых a, b.

Неравенства работают похоже на формулы сокращенного умножения: вместо a и b могут стоять любые выражения.

1 Докажите неравенства:

a $x+\frac{1}{x} \geq 2$ при $x>0$; b $\frac{a+4}{2}+\frac{a+9}{2}>5\sqrt{a}$; c $\frac{ac^2+b}{c} \geq 2\sqrt{ab}$ при $a, b \geq 0$, $c>0$;

d $(a+1)(b+1)(ab+1) \geq 8ab$ при $a, b \geq 0$. Когда достигается равенство?

2 Известно, что $\frac{ab}{3}=\frac{3}{c}$. Докажите, что $(1+a)(1+b)(1+c)>24$.

8 математический класс 1543. Алгебра. 26 января 2023.

• *Неравенство о средних*: для любых неотрицательных a, b выполняется $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. То есть *среднее геометрическое* двух чисел не больше их *среднего арифметического*. Равенство достигается только при $a=b$.

• $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ для неотрицательных a, b;

• $a^2+b^2 \geq 2ab$ для любых a, b.

Неравенства работают похоже на формулы сокращенного умножения: вместо a и b могут стоять любые выражения.

1 Докажите неравенства:

a $x+\frac{1}{x} \geq 2$ при $x>0$; b $\frac{a+4}{2}+\frac{a+9}{2}>5\sqrt{a}$; c $\frac{ac^2+b}{c} \geq 2\sqrt{ab}$ при $a, b \geq 0$, $c>0$;

d $(a+1)(b+1)(ab+1) \geq 8ab$ при $a, b \geq 0$. Когда достигается равенство?

2 Известно, что $\frac{ab}{3}=\frac{3}{c}$. Докажите, что $(1+a)(1+b)(1+c)>24$.

8 математический класс 1543. Алгебра. 26 января 2023.

• *Неравенство о средних*: для любых неотрицательных a, b выполняется $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. То есть *среднее геометрическое* двух чисел не больше их *среднего арифметического*. Равенство достигается только при $a=b$.

• $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ для неотрицательных a, b;

• $a^2+b^2 \geq 2ab$ для любых a, b.

Неравенства работают похоже на формулы сокращенного умножения: вместо a и b могут стоять любые выражения.

1 Докажите неравенства:

a $x+\frac{1}{x} \geq 2$ при $x>0$; b $\frac{a+4}{2}+\frac{a+9}{2}>5\sqrt{a}$; c $\frac{ac^2+b}{c} \geq 2\sqrt{ab}$ при $a, b \geq 0$, $c>0$;

d $(a+1)(b+1)(ab+1) \geq 8ab$ при $a, b \geq 0$. Когда достигается равенство?

2 Известно, что $\frac{ab}{3}=\frac{3}{c}$. Докажите, что $(1+a)(1+b)(1+c)>24$.