8ВМ, спецкурс, занятие 8
4 октября 2022

Делимость. Остатки. Алгоритм Евклида.

Все числа в этом листочке считаются целыми.

Определение. *Число a делится на число b* (обозначение $a \vdots b$), если существует такое число c, что $a = bc$.

$\boxed{\textbf{1}}$ Докажите, используя определение делимости.

$\boxed{\text{a}}$ Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

$\boxed{\text{b}}$ Если $x \vdots a$ и $y \vdots a$, то $(x+y) \vdots a$.

$\boxed{\text{c}}$ Для любого $a \neq 0$ $x \vdots y$ равносильно $ax \vdots ay$.

$\boxed{\text{d}}$ Если $a \vdots b$ и $b \vdots a$, то либо $a = b$, либо $a = -b$.

Определение. *Разделить целое число a с остатком на целое число $b \neq 0$* — это значит представить a в виде

$$a = bq + r, \text{ где } 0 \leq r < |b|.$$

Число q в этом случае называется *неполным частным*, а число r — *остатком.*

$\boxed{\textbf{2}}$ (Все пункты сдаются вместе) Разделите с остатком

$\boxed{\text{a}}$ 43 на 15; $\boxed{\text{b}}$ 43 на -15; $\boxed{\text{c}}$ -43 на 15; $\boxed{\text{d}}$ -43 на -15.

$\boxed{\textbf{3}}$ Число a разделили на 215 и получили в остатке 86. Делится ли a на 43? А на 5?

$\boxed{\textbf{4}}$ Делимое и делитель увеличили в 2022 раза. Как изменились неполное частное и остаток?

$\boxed{\textbf{5}}$ Найдите все числа, меньшие 1000, которые дают остаток 1 при делении на 2, 3, 5 и 7.

Определение. *Наибольшим общим делителем чисел a и b* (не равных нулю одновременно) называется наибольшее такое число c, что $a \vdots c$ и $b \vdots c$. (Обозначение НОД(a, b) или просто (a, b).)

Лемма. $(a, b) = (a - b, b) = (r, b)$, *где r — остаток от деления a на b.*

Алгоритм Евклида. Пусть $a \geq b$, и нам нужно найти (a, b). Заменим a на остаток от деления a на b. НОД от этого не изменится. Продолжим так делить большее с остатком на меньшее и заменять большее число на получившийся остаток. Когда одно из чисел уменьшится до нуля, другое станет равно (a, b).

$\boxed{\textbf{6}}$ При помощи алгоритма Евклида найдите $\boxed{\text{a}}$ $(720, 378)$; $\boxed{\text{b}}$ $(525, 231)$.

$\boxed{\textbf{7}}$ Какие значения может принимать $\boxed{\text{a}}$ $(n, n+6)$; $\boxed{\text{b}}$ $(2n+3, 7n+6)$?

$\boxed{\textbf{8}}$ Существует ли натуральное n, при котором дробь $\dfrac{42n+3}{30n+2}$ сократима?

$\boxed{\textbf{9}}$ Найдите $\boxed{\text{a}}$ $(2^{32}+1, 2^{16}+1)$; $\boxed{\text{b}}$ $(2^{91}-1, 2^{63}-1)$;
$\boxed{\text{c}}$ $(\underbrace{11\ldots11}_{\text{100 единиц}}, \underbrace{11\ldots11}_{\text{60 единиц}})$; $\boxed{\text{d}}$ $(a^m - 1, a^n - 1)$.

10* Тридцать три богатыря нанялись охранять Лукоморье за 240 монет. Хитрый дядька Черномор может разделить богатырей на отряды произвольной численности (или записать всех в один отряд), а затем распределить всё жалованье между отрядами. Каждый отряд делит свои монеты поровну, а остаток отдаёт Черномору. Какое наибольшее количество монет может достаться Черномору, если:

a) жалованье между отрядами Черномор распределяет как ему угодно;

b) жалованье между отрядами Черномор распределяет поровну?

8ВМ, спецкурс, занятие 8

4 октября 2022

Делимость. Остатки. Алгоритм Евклида.

Все числа в этом листочке считаются целыми.

Определение. *Число a делится на число b* (обозначение $a \vdots b$), если существует такое число c, что $a = bc$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Докажите, используя определение делимости.

$\boxed{\text{a}}$ Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

$\boxed{\text{b}}$ Если $x \vdots a$ и $y \vdots a$, то $(x+y) \vdots a$.

$\boxed{\text{c}}$ Для любого $a \neq 0$ $x \vdots y$ равносильно $ax \vdots ay$.

$\boxed{\text{d}}$ Если $a \vdots b$ и $b \vdots a$, то либо $a = b$, либо $a = -b$.

Определение. *Разделить целое число a с остатком на целое число $b \neq 0$* — это значит представить a в виде

$$a = bq + r, \text{ где } 0 \leq r < |b|.$$

Число q в этом случае называется *неполным частным*, а число r — *остатком.*

$\boxed{\mathbf{2}}$ (Все пункты сдаются вместе) Разделите с остатком

$\boxed{\text{a}}$ 43 на 15; $\boxed{\text{b}}$ 43 на -15; $\boxed{\text{c}}$ -43 на 15; $\boxed{\text{d}}$ -43 на -15.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Число a разделили на 215 и получили в остатке 86. Делится ли a на 43? А на 5?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Делимое и делитель увеличили в 2022 раза. Как изменились неполное частное и остаток?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Найдите все числа, меньшие 1000, которые дают остаток 1 при делении на 2, 3, 5 и 7.

Определение. *Наибольшим общим делителем чисел a и b* (не равных нулю одновременно) называется наибольшее такое число c, что $a \vdots c$ и $b \vdots c$. (Обозначение НОД(a, b) или просто (a, b).)

Лемма. $(a, b) = (a - b, b) = (r, b)$*, где r — остаток от деления a на b.*

Алгоритм Евклида. Пусть $a \geq b$, и нам нужно найти (a, b). Заменим a на остаток от деления a на b. НОД от этого не изменится. Продолжим так делить большее с остатком на меньшее и заменять большее число на получившийся остаток. Когда одно из чисел уменьшится до нуля, другое станет равно (a, b).

$\boxed{\mathbf{6}}$ При помощи алгоритма Евклида найдите $\boxed{\text{a}}$ $(720, 378)$; $\boxed{\text{b}}$ $(525, 231)$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Какие значения может принимать $\boxed{\text{a}}$ $(n, n+6)$; $\boxed{\text{b}}$ $(2n+3, 7n+6)$?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Существует ли натуральное n, при котором дробь $\dfrac{42n+3}{30n+2}$ сократима?

$\boxed{\mathbf{9}}$ Найдите $\boxed{\text{a}}$ $(2^{32}+1, 2^{16}+1)$; $\boxed{\text{b}}$ $(2^{91}-1, 2^{63}-1)$;
$\boxed{\text{c}}$ $(\underbrace{11\ldots11}_{100\text{ единиц}}, \underbrace{11\ldots11}_{60\text{ единиц}})$; $\boxed{\text{d}}$ (a^m-1, a^n-1).

10* Тридцать три богатыря нанялись охранять Лукоморье за 240 монет. Хитрый дядька Черномор может разделить богатырей на отряды произвольной численности (или записать всех в один отряд), а затем распределить всё жалованье между отрядами. Каждый отряд делит свои монеты поровну, а остаток отдаёт Черномору. Какое наибольшее количество монет может достаться Черномору, если:

- a) жалованье между отрядами Черномор распределяет как ему угодно;
- b) жалованье между отрядами Черномор распределяет поровну?