

8ВМ, спецкурс, занятие 6

27 сентября 2022

Защикливание

Определение. Если в последовательности, начиная с какого-то момента, начинают повторяться одни и те же элементы, то говорится, что эта последовательность *защикливается* (или что она *периодическая*). Повторяющиеся элементы образуют *период*. Перед всеми периодами может идти *предпериод*.

$$\underbrace{2, 0, 22, 1, 1, 1}_{\text{предпериод}}, \underbrace{1, 5, 4, 3, 1, 0}_{\text{период}}, \underbrace{1, 5, 4, 3, 1, 0}_{\text{период}}, \underbrace{1, 5, 4, 3, 1, 0}_{\text{период}}, \dots$$

- 1 Найдите последнюю цифру а $23^{64} + 64^{23}$; б $333^{(555^{111})}$.
- 2 Последовательность a_1, a_2, a_3, \dots задана рекуррентно: $a_1 = a_2 = 1$ и $a_{n+1} = a_n a_{n-1} + 1$. Какой остаток от деления на 4 дает a_{1543} ?
- 3 Какая цифра стоит на 100-м месте после запятой в десятичной записи числа $\frac{3}{14}$?
- 4 Придумайте непериодическую последовательность, состоящую только из 1 и 2.
- 5 У последовательности a_1, a_2, a_3, \dots есть период длины 7. Докажите, что последовательность $a_{10}, a_{20}, a_{30}, \dots$ периодическая.
- 6 (Задача под разбор) а Анна Алексеевна приклеила на двери всех кабинетов школы записки с надписями: «Спецкурс 8ВМ в кабинете №...» (в разных записках номера кабинетов могут быть разными, а могут и повторяться), а потом исчезла в неизвестном направлении. Миша пытается попасть на спецкурс, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что в какой-то момент он начнет ходить по циклу.
- б На следующий день на всех дверях было написано «Спецкурс 8ВМ в кабинете №... или в кабинете №20» (первое число в разных надписях может быть разным, а может и повторяться). Правда ли, что если Миша будет руководствоваться этими указаниями, то рано или поздно он начнет ходить по циклу?
- в В межгалактической школе бесконечное число кабинетов, пронумерованных натуральными числами. На двери каждого кабинета записка «Спецкурс 8∞ в кабинете №...» Правда ли, что если Миша будет руководствоваться этими указаниями, то рано или поздно он начнет ходить по циклу?
- г Однажды в честь Дня Гимназии в 1543 решили устроить квест. На двери каждого кабинета повесили записку: «Если ты пришел к этому кабинету из старого корпуса, то иди в кабинет №... А если из нового, то иди в кабинет №...». Правда ли, что все участники этого квеста рано или поздно начнут ходить по циклу?

Теорема (о защикливании). Если система может находиться лишь в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние зависит только от предыдущего, она с некоторого момента защиклится.

7 В городе Энске есть несколько площадей, соединенных улицами. От каждой площади отходит ровно три улицы, все в разные стороны. Участник соревнований по городскому ориентированию ходит по улицам, на каждой площади сворачивая по очереди то направо, то налево. Докажите, что его маршрут рано или поздно зациклится.

8 Маша упражняется в счете, выписывая очень длинную последовательность цифр. Первые две цифры ей написала Анна Алексеевна, а каждая следующая цифра в последовательности равна последней цифре суммы двух предыдущих (например, после . . . , 7, 9 она пишет 6 — последнюю цифру $7 + 9 = 16$). Докажите, что эта последовательность рано или поздно зациклится.

Теорема (о зацикливании+). *Если система может находиться лишь в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние зависит только от фиксированного числа предыдущих, она с некоторого момента зациклится.*

9 Напоминаем, что *числами Фибоначчи* называется последовательность чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . . , в которой каждое следующее число равно сумме двух предыдущих.

a Докажите, что в ней бесконечное число четных чисел.

b Докажите, что в ней бесконечное число чисел, делящихся на 3.

c Правда ли, что каждое пятое число Фибоначчи делится на 5?

d Как часто в этой последовательности встречаются числа, заканчивающиеся на 0?

10 Теперь Маша из задачи 8 выписывает последовательность, где каждая следующая цифра равна последней цифре произведения двух предыдущих. Так же, как и в предыдущей задаче, эта последовательность зациклится.

Докажите, что длина цикла **a** не больше 25; **b** не больше 16.

11 Компьютерная программа пишет десятичную дробь по такому правилу. Сначала 0, потом запятая, потом десять произвольных цифр с помощью датчика случайных чисел. Каждая цифра, начиная с 11-й, равна последней цифре суммы нескольких предыдущих цифр, а именно: количество слагаемых равно предыдущей цифре, а если предыдущая цифра — 0, то берется 10 слагаемых. Докажите, что программа пишет периодическую дробь. Оцените длину её периода.