8ВМ, спецкурс, занятие 5
20 сентября 2022

Принцип наименьшего элемента

Принцип наименьшего элемента. В любом непустом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьшее число.

Идея его применения. Предположим, утверждение верно не при всех n. Рассмотрим наименьший N для которого оно не верно. А дальше докажем, что либо этот N на самом деле не наименьший, либо при этом N утверждение верно, и придем к противоречию.

0 Докажите, что не существует таких натуральных чисел x и y, что $x^2=2y^2$.

1 Применим ли принцип наименьшего элемента к множеству целых чисел? А к множеству неотрицательных рациональных чисел?

2 Докажите, что в последовательности чисел Фибоначчи не найдется двух последовательных чисел, делящихся на 7.

3 Докажите, что любое натуральное число раскладывается на простые множители.

4 Докажите, что не существует таких натуральных x, y, z, что $9x^3+3y^3=z^3$.

5 Найдите ошибку в следующем рассуждении.

Докажем, что все натуральные числа не меньше 1543. Предположим противное: существуют некоторые числа, которые меньше 1543. Пусть M — множество всех таких чисел, а n — наименьшее число в нем. Тогда $n-1 \notin M$, а значит $n-1 \geq 1543$. Но тогда $n \geq 1544 > 1543$, противоречие.

6* a) Выведите из принципа наименьшего элемента принцип индукции в форме Пеано.

b) Выведите из принципа индукции принцип наименьшего элемента.

7 Докажите по индукции *неравенство Бернулли*: $(1+a)^n \geq 1+na$ при $a \geq -1$.

8 Найдите ошибку в решении задачи. Предложите верное решение.

Тупоугольный треугольник разбит отрезками на несколько треугольников. Верно ли, что один из треугольников разбиения обязательно не остроугольный?

<u>Решение:</u> Да, верно. Докажем это индукцией по количеству отрезков.

<u>База:</u> если отрезок один, то он идет из вершины треугольника к противоположной стороне. У этой стороны образуется хотя бы один неострый угол.

<u>Переход:</u> предположим, что если треугольник разбит n отрезками на несколько треугольников, то хотя бы один из них не остроугольный. Проведем $(n+1)$-ый отрезок. Он разобьет какой-то треугольник на два новых, один из них обязательно будет не остроугольный. Утверждение доказано.

9 На какое максимальное число частей могут разбить плоскость n прямых?

10* На какой максимальное число частей могут разбить пространство n плоскостей?

8ВМ, спецкурс, занятие 5
20 сентября 2022

Принцип наименьшего элемента

Принцип наименьшего элемента. В любом непустом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьшее число.

Идея его применения. Предположим, утверждение верно не при всех n. Рассмотрим наименьший N для которого оно не верно. А дальше докажем, что либо этот N на самом деле не наименьший, либо при этом N утверждение верно, и придем к противоречию.

0 Докажите, что не существует таких натуральных чисел x и y, что $x^2 = 2y^2$.

1 Применим ли принцип наименьшего элемента к множеству целых чисел? А к множеству неотрицательных рациональных чисел?

2 Докажите, что в последовательности чисел Фибоначчи не найдется двух последовательных чисел, делящихся на 7.

3 Докажите, что любое натуральное число раскладывается на простые множители.

4 Докажите, что не существует таких натуральных x, y, z, что $9x^3 + 3y^3 = z^3$.

5 Найдите ошибку в следующем рассуждении.

Докажем, что все натуральные числа не меньше 1543. Предположим противное: существуют некоторые числа, которые меньше 1543. Пусть M — множество всех таких чисел, а n — наименьшее число в нем. Тогда $n - 1 \notin M$, а значит $n - 1 \geq 1543$. Но тогда $n \geq 1544 > 1543$, противоречие.

6* a Выведите из принципа наименьшего элемента принцип индукции в форме Пеано.

b Выведите из принципа индукции принцип наименьшего элемента.

7 Докажите по индукции *неравенство Бернулли*: $(1 + a)^n \geq 1 + na$ при $a \geq -1$.

8 Найдите ошибку в решении задачи. Предложите верное решение.

Тупоугольный треугольник разбит отрезками на несколько треугольников. Верно ли, что один из треугольников разбиения обязательно не остроугольный?

Решение: Да, верно. Докажем это индукцией по количеству отрезков.

База: если отрезок один, то он идет из вершины треугольника к противоположной стороне. У этой стороны образуется хотя бы один неострый угол.

Переход: предположим, что если треугольник разбит n отрезками на несколько треугольников, то хотя бы один из них не остроугольный. Проведем $(n+1)$-ый отрезок. Он разобьет какой-то треугольник на два новых, один из них обязательно будет не остроугольный. Утверждение доказано.

9 На какое максимальное число частей могут разбить плоскость n прямых?

10* На какой максимальное число частей могут разбить пространство n плоскостей?