

# 8ВМ, спецкурс, занятие 4

14 сентября 2022

## Индукция и алгебра

1 Докажите по индукции соотношения:

a  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ;

b  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ;

c  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ;

d  $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ ;

e  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$ .

2 Число  $x$  таково, что  $x + \frac{1}{x}$  целое. Докажите по индукции, что  $x^n + \frac{1}{x^n}$  — тоже целое.

3 Докажите, что

a  $2^n > n$  при всех натуральных  $n$ ;

b  $n! > 2^n$  при  $n > 3$ ;

c  $2^n > n^2$  при  $n > 4$ .

4 Чему равно  $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$ ?

Идеология: доказывать такие формулы легко, а вот придумывать их — сложно. Есть несколько способов, как это можно сделать:

- Экстрасенсорный. Вычислите суммы одного, двух, трех, четырех... первых слагаемых, угадайте формулу и докажите ее по индукции.
- Геометрический. Представьте сумму в виде какой-нибудь фигуры из соответствующего количества клеточек/кубиков. Разрежьте эту фигуру на более простые части или же сложите из нескольких таких фигур что-нибудь более простое, а затем вычислите ее площадь/объем.
- Сведение задачи к уже решенной. Найдите какую-нибудь похожую формулу и сделайте из нее нужную вам.