8ВМ, спецкурс, занятие 30

2 мая 2023

Многочлены

Многочленом называется функция $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$, где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ — какие-то числа (и $a_n\neq 0$).

Степень многочлена равна максимальной степени, в которой переменная входит в него. Обозначение $\deg P(x)=n$.

Многочлен $P(x)$ *делится* на $Q(x)$, если существует такой многочлен $A(x)$, что $P(x)=Q(x)\cdot A(x)$.

НОД$(P(x), Q(x))$ — это многочлен максимально возможной степени, на который делятся и $P(x)$, и $Q(x)$.

Разделить многочлен $P(x)$ *с остатком* на многочлен $Q(x)$ — это представить его в виде $P(x)=Q(x)\cdot A(x)+R(x)$, где $\deg R(x)<\deg Q(x)$.

1 Найдите НОД многочленов при помощи алгоритма Евклида:

a) $P(x)=x^3+x-2$, $Q(x)=x^3+x^2-x-1$;

b) $P(x)=x^4-x^3+3x^2-x+6$, $Q(x)=x^4+6x^2+3x+10$.

Теорема (Безу)**.** Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x-a$ равен $P(a)$.

Следствие. Многочлен $P(x)$ делится на $x-a$ тогда и только тогда, когда $P(a)=0$ (то есть a — корень многочлена $P(x)$).

2 a) Вспомните, как доказывается теорема Безу.

b) Выведите из нее, что многочлен степени n не может иметь больше n корней.

3 Найдите остаток от деления $x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x$

a) на $x-1$; b) на x^2-1.

4 Многочлен $P(x)$ дает остаток 15 при делении на $x-1$ и остаток 43 при делении на $x-2$. Какой остаток дает этот многочлен при делении на x^2-3x+2?

5 a) Многочлен $P(x)$ делится на $x-1$. Докажите, что сумма его коэффициентов равна 0.

b) Найдите сумму всех коэффициентов многочлена $Q(x)=\left(2x^3-2x^2+1\right)^{43}$.

c) Найдите сумму всех коэффициентов при нечетных степенях переменной в многочлене $Q(x)=\left(2x^3-2x^2+1\right)^{43}$.

6 a) Пусть $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, а $x=b$ — целый корень этого многочлена. Докажите, что $a_0 \vdots b$. (Иными словами, все целые корни многочлена являются делителями его свободного члена.)

b) Решите уравнение $x^4-7x^3-4x^2+22x-12=0$.

7 Найдите все такие многочлены $P(x)$, что $2P(2x)=P(3x)+P(x)$.

Подсказка: посмотрите на коэффициент при старшей степени переменной.

8ВМ, спецкурс, занятие 30

2 мая 2023

Многочлены

Многочленом называется функция $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$, где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ — какие-то числа (и $a_n \neq 0$).

Степень многочлена равна максимальной степени, в которой переменная входит в него. Обозначение $\deg P(x)=n$.

Многочлен $P(x)$ *делится* на $Q(x)$, если существует такой многочлен $A(x)$, что $P(x)=Q(x)\cdot A(x)$.

НОД$(P(x), Q(x))$ — это многочлен максимально возможной степени, на который делятся и $P(x)$, и $Q(x)$.

Разделить многочлен $P(x)$ с остатком на многочлен $Q(x)$ — это представить его в виде $P(x)=Q(x)\cdot A(x)+R(x)$, где $\deg R(x)<\deg Q(x)$.

1 Найдите НОД многочленов при помощи алгоритма Евклида:
 a) $P(x)=x^3+x-2$, $Q(x)=x^3+x^2-x-1$;
 b) $P(x)=x^4-x^3+3x^2-x+6$, $Q(x)=x^4+6x^2+3x+10$.

Теорема (Безу)**.** Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x-a$ равен $P(a)$.

Следствие. Многочлен $P(x)$ делится на $x-a$ тогда и только тогда, когда $P(a)=0$ (то есть a — корень многочлена $P(x)$).

2 a) Вспомните, как доказывается теорема Безу.
 b) Выведите из нее, что многочлен степени n не может иметь больше n корней.

3 Найдите остаток от деления $x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x$
 a) на $x-1$; b) на x^2-1.

4 Многочлен $P(x)$ дает остаток 15 при делении на $x-1$ и остаток 43 при делении на $x-2$. Какой остаток дает этот многочлен при делении на x^2-3x+2?

5 a) Многочлен $P(x)$ делится на $x-1$. Докажите, что сумма его коэффициентов равна 0.
 b) Найдите сумму всех коэффициентов многочлена $Q(x)=\left(2x^3-2x^2+1\right)^{43}$.
 c) Найдите сумму всех коэффициентов при нечетных степенях переменной в многочлене $Q(x)=\left(2x^3-2x^2+1\right)^{43}$.

6 a) Пусть $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, а $x=b$ — целый корень этого многочлена. Докажите, что $a_0 \vdots b$. (Иными словами, все целые корни многочлена являются делителями его свободного члена.)
 b) Решите уравнение $x^4-7x^3-4x^2+22x-12=0$.

7 Найдите все такие многочлены $P(x)$, что $2P(2x)=P(3x)+P(x)$.
Подсказка: посмотрите на коэффициент при старшей степени переменной.