Устный экзамен по спецкурсу за 8 класс. Программа.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Принцип математической индукции. Принцип наименьшего элемента и его применение к решению задач (формулировки).

$\boxed{\mathbf{2}}$ Делимость нацело. Деление с остатком. Сравнимость по модулю (определения). Критерий сравнимости через остатки. Свойства сравнений (формулировки и доказательства).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Прямой и обратный алгоритм Евклида (зачем нужны, в чем состоят). Как решать линейные диофантовы уравнения $ax+by=c$ для взаимно простых a и b.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Лемма Евклида. Основная теорема арифметики (формулировки и доказательства).

$\boxed{\mathbf{5}}$ Деление по модулю (определение). Сравнение $ax \equiv c \pmod{m}$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $(a, m)=1$ (доказательство).

$\boxed{\mathbf{6}}$ **Теорема Вильсона (формулировка и доказательство)**.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Малая теорема Ферма (формулировка и доказательство).

$\boxed{\mathbf{8}}$ Китайская теорема об остатках (формулировка и доказательство).

$\boxed{\mathbf{9}}$ Множества, их элементы, пустое множество. Мощность множества. Подмножества (определения). Количество подмножеств в конечном множестве. Сумма мощностей всех подмножеств. Подмножеств с четным и нечетным числом элементов поровну (формулировки и доказательства).

$\boxed{\mathbf{10}}$ Операции на множествах (определения и значки). Формула включений-исключений (формулировка и доказательство).

$\boxed{\mathbf{11}}$ Функция Эйлера, ее явное выражение через разложение числа на простые множители (формулировка и доказательство).

$\boxed{\mathbf{12}}$ Треугольник Паскаля (определение). Его элементы — это C_n^k (доказательство). Свойства треугольника Паскаля и соотношения для «цэшек» (формулировки и доказательства).

$\boxed{\mathbf{13}}$ Бином Ньютона (формулировка и доказательство).

$\boxed{\mathbf{14}}$ Сочетания с повторениями (определение). Количество решений уравнения $x_1+x_2+\dots+x_n=k$ в натуральных и в целых неотрицательных числах (вывод формул).

$\boxed{\mathbf{15}}$ Вероятность. Элементарные исходы, вероятностное пространство, события, вероятность события. Независимые события. Несовместные события. Полная система событий (опредения).

$\boxed{\mathbf{16}}$ Условная вероятность (определение). Формула полной вероятности. Формула Байеса (формулировки и доказательства).

$\boxed{\mathbf{17}}$ Графы. Степени вершин, компоненты связности (определения). Лемма о рукопожатиях (формулировка и доказательство).

$\boxed{\mathbf{18}}$ Деревья (определения). Остовное дерево графа (определение, доказательство существования). В дереве есть хотя бы два листа. Количество ребер в дереве. Минимальное количество ребер в связном графе (формулировки и доказательства).

$\boxed{\mathbf{19}}$ Двудольные графы (определение). Критерий двудольного графа (формулировка и доказательство).

$\boxed{\mathbf{20}}$ Эйлеровы графы (определение). Критерий эйлеровости графа. Критерий эйлеровости ориентированного графа (формулировки и доказательства).

$\boxed{\mathbf{21}}$ Планарные графы (определение). Формула Эйлера для планарного графа (формулировка и доказательство). Ее применение к выпуклым многогранникам.

$\boxed{\mathbf{22}}$ Деление многочленов с остатком (определение, как это делать). Теорема Безу. Многочлен степени n имеет не больше n корней (формулировки и доказательства).

$\boxed{\mathbf{23}}$ Задача об интерполяционном многочлене (формулировка). Интерполяционные многочлены Ньютона и Лагранжа (конструкции).

Важные задачи из листочков

Числа и другие детали в задачах могут меняться.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Задайте последовательность $1, 5, 1, 5, 1, \ldots$ формулой и рекуррентно.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{\text{a}}$ Пусть p_n — количество способов разрезать полоску $1\times n$ на квадратики 1×1 и доминошки 1×2. Задайте последовательность $p_1, p_2, p_3, \ldots$ рекуррентно.

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что число способов разрезать прямоугольник $2\times n$ на доминошки 1×2 тоже равно p_n.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Из квадрата $2^n\times 2^n$ вырезали произвольную клетку. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки.

$\boxed{\mathbf{4}}$ **Ханойская башня.** Есть три стержня, на один из них надета пирамидка из n колец. Кольца можно переносить со стержня на стержень по следующим правилам:

- кольца можно переносить только по одному
- нельзя откладывать кольца в сторону
- нельзя класть большее кольцо на меньшее

Докажите, что всю пирамиду можно перенести на другой стержень за 2^n-1 ход.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Плоскость разбита на несколько частей прямыми линиями. Докажите, что можно покрасить эти части в черный и белый цвета так, чтобы соседние части были разного цвета.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Докажите <u>по индукции</u> соотношения:

$\boxed{\text{a}}$ $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

$\boxed{\text{b}}$ $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Докажите, что не существует таких натуральных x, y, z, что $9x^3+3y^3=z^3$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ *Числами Фибоначчи* называется последовательность чисел $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, в которой каждое следующее число равно сумме двух предыдущих.

Докажите, что каждое третье число в ней четно, каждое четвертое делится на 3, а каждое пятое делится на 5.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Найдите последнюю цифру $23^{45}+32^{54}$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что всегда можно вернуть его в исходное состояние, выполнив эту комбинацию еще несколько раз.

$\boxed{\mathbf{11}}$ При помощи алгоритма Евклида найдите НОД $\boxed{\text{a}}$ $(525, 231)$; $\boxed{\text{b}}$ $(2^{32}+1, 2^{16}+1)$; $\boxed{\text{c}}$ $(\underbrace{11\ldots 11}_{\text{100 единиц}}, \underbrace{11\ldots 11}_{\text{60 единиц}})$; $\boxed{\text{d}}$ $(2^{63}-1, 2^{91}-1)$.

$\boxed{\mathbf{12}}$ При помощи обратного алгоритма Евклида найдите такие целые x и y, что $71x+33y=1$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Найдите все $\boxed{\text{a}}$ целые; $\boxed{\text{b}}$ натуральные решения уравнения $162x+46y=2000$.

$\boxed{\mathbf{14}}$ $\boxed{\text{a}}$ Пусть числа a и b разложены на простые множители: $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ и $b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k}$. Найдите разложения НОД$(a, b)=(a, b)$ и НОК$(a, b)=[a, b]$.

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что $a\cdot b=(a, b)\cdot[a, b]$.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Найдите остатки от деления:

$\boxed{\text{a}}$ $776^{776}+777^{777}+778^{778}$ на 3; $\boxed{\text{b}}$ 3^{2023} на 43; $\boxed{\text{c}}$ 2^{70} на 119.

$\boxed{\mathbf{16}}$ Решите линейные сравнения $\boxed{\text{a}}$ $1543x\equiv 2023 \pmod{29}$; $\boxed{\text{b}}$ $36x\equiv 15 \pmod{51}$.

$\boxed{\mathbf{17}}$ Решите квадратные сравнения a $x^2+1533x\equiv 1527 \pmod{1543}$; b $n^2+3n+1\equiv 0 \pmod{55}$.

18 Докажите, что число 15431543 не представимо в виде суммы a двух; b трех квадратов.

19 Решите систему сравнений $\begin{cases} x\equiv 2 \pmod{13} \\ x\equiv 4 \pmod{19} \end{cases}$

20 У Коли есть две кривые монеты: красная, на которой решка выпадает с вероятностью 0,4, и синяя, на которой решка выпадает с вероятностью 0,7. Коля кидает эти монеты одновременно.

a Как выглядит вероятностное пространство этой задачи?

b Найдите вероятность события «выпадет хотя бы одна решка».

21 Случайным образом выбирается натуральное число от 1 до 100 (все числа равновероятны). Являются ли события «выбранное число делится на 5» и «выбранное число делится на 7» независимыми?

22 Ужасной болезнью «спидорак» болеет в среднем 1 человек из 10000. У новейших тестов на спидорак вероятность ложноположительного результата равна 5% (то есть 5% здоровых людей тест показывает, что они больны), а вероятность ложноотрицательного результата равна 0,1% (то есть у 0,1% больных людей тест заболевание не выявляет). Тест показал положительный результат. С какой вероятностью человек на самом деле болен спидораком?

23 В ящике имеется 10 белых и 15 черных шаров. Из ящика вынимаются 4 шара. Найдите вероятность того, что вытащили три белых и один черный шар.

24 В классе 23 человека. С какой вероятностью хотя бы у двух школьников в этом классе дни рождения совпадают?

25 В выражении $\left(x+\frac{2}{x^3}\right)^{20}$ раскрыли скобки и привели подобные. Найдите слагаемое, не содержащее переменную.

26 В конкурсе Деда Мороза участвовали 7 детей. Сколькими способами он мог распределить между ними 40 конфет, если за первое место положено давать не менее 7 конфет, за второе — не менее 6, и т.д. за седьмое — не менее 1 конфеты? (Не обязательно давать больше конфет тому, у кого место выше.)

27 В связном графе степени всех вершин четны. Одно ребро стерли. Докажите, что граф остался связным.

28 На столе лежит коробочка, внутри которой находятся 7 коробочек. В некоторых из них лежит по семь коробочек, в некоторых из них тоже лежит по семь коробочек, и так далее, а пустых коробочек получилось всего 49. Сколько всего коробочек?

29 Из веревочек связали волейбольную сетку 15×43. Какое максимальное число разрезов можно сделать, чтобы сетка не распалась на куски?

30 На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в n клеток. Его контур идёт по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника?

31 На двух клетках шахматной доски стоят чёрная и белая фишки. За один ход можно передвинуть любую из них на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку (две фишки не могут стоять на одной клетке). Могут ли в результате таких ходов встретиться все возможные варианты расположения этих двух фишек, причём ровно по одному разу?

32 20 школьников решили 20 задач. Каждый решил по 2 задачи, и каждую задачу решило 2 человека. Докажите, что можно попросить каждого школьника рассказать одну из решенных им задач так, чтобы все задачи были рассказаны.

33 Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратиков клетчатого квадрата 4×4 представить в виде объединения пяти ломаных длины 8?

34 На кодовом замке 10 кнопок с цифрами от 0 до 9. Для открытия кодового замка нужно нажать 4 кнопки в определенном порядке (при этом предыдущие нажатия не важны). Докажите, что замок можно наверняка открыть, сделав не более 10003 нажатий.

35 Докажите, что в планарном графе, у которого больше одного ребра

a $3F \le 2E$; b $E \le 3V - 6$;

c есть вершина, степень которой не больше 5.

36 Докажите, что графы K_5 и $K_{3,3}$ нельзя нарисовать на плоскости без пересечений.

37 Докажите, что вершины планарного графа можно раскрасить в шесть цветов так, чтобы концы любого ребра были разных цветов.

38 Дан выпуклый многогранник, у которого все грани являются правильными пяти- или шестиугольниками. Сколько может быть пятиугольных граней?

39 a Ребра полного графа с 6 вершинами раскрасили в два цвета. Докажите, что найдется одноцветный треугольник.

b Ребра полного графа с 17 вершинами покрасили в три цвета. Докажите, что найдется одноцветный треугольник.

40 Многочлен $P(x)$ дает остаток 15 при делении на $x-1$ и остаток 43 при делении на $x-2$. Какой остаток дает этот многочлен при делении на x^2-3x+2?

41 Найдите сумму всех коэффициентов многочлена $Q(x) = (2x^3 - 2x^2 + 1)^{43}$.

42 Постройте многочлен $P(x)$ третьей степени, такой что $P(1)=1$, $P(3)=4$, $P(5)=10$, $P(7)=27$.

43 Решите уравнение

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

.