8ВМ, спецкурс, занятие 28
7 апреля 2023
Планарные графы

Определение. Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались. (При этом ребра не обязательно должны быть прямыми линиями.)

У любого графа можно подсчитать количество вершин V и количество ребер E.

У планарного графа дополнительно можно еще подсчитать количество частей, на которые он разрезает плоскость. Эти части называются *гранями*, их количество обозначается через F.

Теорема (формула Эйлера)**.** В любом связном планарном графе выполняется соотношение $V-E+F=2$.

Доказательство. Зафиксируем число вершин V и будем вести индукцию по числу ребер E.

<u>База:</u> минимальное число ребер в связном графе с V вершинами равняется $V-1$. В этом случае граф является деревом, в нем нет циклов, а значит грань всего одна. Получается $V-(V-1)+1=2$.

<u>Переход:</u> допустим, для всех графов с $E-1$ ребрами формула уже доказана. Рассмотрим граф с E ребрами. Пусть в нем F граней. В графе есть цикл (поскольку для деревьев все уже доказано). Удалим одно ребро из этого цикла. От этого число граней уменьшится на 1. Получится граф с V вершинами, $E-1$ ребрами и $F-1$ гранями. По предположению индукции, $V-(E-1)+(F-1)=2$. А значит и в исходном графе $V-E+F=2$. □

Теорема. Если в планарном графе V вершин, E ребер, F граней и k компонент связности, то $V-E+F=k+1$.

Доказательство. Можно доказать аналогично индукцией по числу ребер. Когда мы убираем ребро, сохраняя граф связным, то E и F уменьшаются на 1, а V и k остаются неизменными. А когда мы убираем мост, то E уменьшается на 1, k увеличивается на 1, а V и F остаются неизменными.

В любом случае, значение выражения $V-E+F-k$ остается неизменным, а для графа без ребер оно равно 1. □

Формулу Эйлера $V-E+F=2$ можно применять не только для планарных графов, но и для многогранников.

Пусть вам дан многогранник, сделанный из резины (и пустой внутри). Вырежем небольшое отверстие в центре одной из граней и растянем его края так, чтобы резина стала плоскостью. Тогда ребра многогранника станут ребрами планарного графа. Количество вершин, ребер и граней у этого графа будет таким же, как и у исходного многогранника.

Замечание. Графы можно рисовать не только на плоскости, но и на других поверхностях, например на поверхности бублика или кренделя. Предположим, что все получившиеся грани можно «расплющить», чтобы они стали плоскими.

Тогда выполняется формула Эйлера $V-E+F=\chi$, где χ зависит только от поверхности, на которой рисуют граф (так называемая *эйлерова характеристика* поверхности).

Обозначим через K_n *полный граф* с n вершинами (в нем любые две вершины соединены ребром).

Через $K_{n,m}$ обозначим *полный двудольный граф*, с n вершинами в одной доле и m в другой (любые две вершины из разных долей соединены ребром).

1 Нарисуйте на плоскости без пересечений графы a K_4; b $K_{2,n}$; c какой-нибудь граф с 10 вершинами, степени всех вершин которого не меньше 4.

2 В стране 7 озер, соединенных между собой 11 каналами, причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в стране островов, образованных озерами и каналами?

3 Докажите, что в планарном графе, у которого больше одного ребра
a $3F \leq 2E$; b $E \leq 3V - 6$;
c есть вершина, степень которой не больше 5.
Подсказка: у каждой грани не меньше трех сторон.

4 Докажите, что если в планарном графе нет циклов длины три, то $2F \leq E$.

5 Докажите, что графы a K_5; b $K_{3,3}$ не являются планарными.

6 Докажите, что вершины планарного графа можно раскрасить в шесть цветов так, чтобы концы любого ребра были разных цветов.

7 Дан выпуклый многогранник, у которого все грани являются правильными пяти- или шестиугольниками. Сколько может быть пятиугольных граней?

Выпуклый многогранник называется *правильным*, если все его грани — правильные многоугольники и во всех вершинах сходится одинаковое число ребер.

Планарный граф называется *правильным*, если степени всех его вершин равны, а у всех граней одинаковое число сторон.

8 a Докажите, что существует всего пять правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр (погуглите, если не знаете, как они выглядят).
b* Сколько существует правильных планарных графов?

9 Изобразите на торе (поверхности бублика) без пересечений графы
a K_5; b $K_{3,3}$; c K_7. Вычислите для них $V - E + F$.
Подсказка: тор удобно представлять как квадрат со склеенными противоположными сторонами.

10* На окружности отметили n точек и соединили каждые две из них хордой. Никакие три хорды не пересеклись в одной точке.
a Найдите количество точек пересечения.
b Найдите количество частей, на которые эти хорды разрезали круг.