# 8ВМ, спецкурс, занятие 27

## 31 марта 2023

# *Эйлеровы графы*

**Определение.** Путь, проходящий по всем ребрам графа по одному разу, называется *эйлеровым путем.*

Замкнутый эйлеров путь называется *эйлеровым циклом.*

Граф, в котором есть эйлеров цикл, называется *эйлеровым графом.*

**Теорема** (критерий эйлеровости графа)**.** В связном графе есть эйлеров цикл в том и только том случае, когда все вершины графа имеют четную степень.

В связном графе есть незамкнутый эйлеров путь в том и только том случае, когда в нем есть ровно две вершины нечетной степени.

*Доказательство.* Когда мы обходим граф по эйлерову циклу, в каждую вершину мы входим и выходим одинаковое количество раз. Поэтому все вершины имеют четную степень.

Когда мы обходим граф по незамкнутому эйлерову пути, в каждую вершину, кроме начальной и конечной, мы входим и выходим одинаковое количество раз. Из начальной вершины мы выходим на 1 раз больше, а в конечную — входим на 1 раз больше. Поэтому начальная и конечная вершины имеют нечетную степень, а остальные — четную.

Теперь докажем, что если в связном графе все вершины имеют четную степень, то в нем есть эйлеров цикл. Воспользуемся индукцией по количеству ребер.

База: если в связном графе 0 ребер, то он состоит из одной вершины и в нем, естественно, есть эйлеров цикл.

Переход: пусть мы уже все доказали для графов в которых меньше $n$ ребер. Рассмотрим граф с $n$ ребрами. В нем можно выделить цикл: пойдем по ребрам, пока не придем в вершину, где мы уже были (в тупик мы не упремся, поскольку степени всех вершин не меньше 2).

Покрасим этот цикл в зеленый и временно уберем его. Граф развалится на несколько компонент связности, в каждой из которых все вершины четной степени. По предположению индукции все эти компоненты являются эйлеровыми графами.

Сконструируем эйлеров цикл в исходном графе. Будем идти по зеленому циклу, пока мы не придем в новую компоненту связности. Обойдем ее по эйлерову циклу (который существует по предположению индукции) и пойдем по зеленому циклу дальше. И так пока не вернемся в вершину, откуда начинали.

Наконец, если в исходном графе было две вершины нечетной степени $A$ и $B$, то добавим ребро $AB$, сделав степени всех вершин четными. Построим эйлеров цикл, а затем выкинем из этого цикла $AB$. Это даст эйлеров путь. □

**Замечание.** *Мультиграфом* называется граф, в котором разрешены петли (ребра, соединяющие вершину саму с собой) и кратные ребра (несколько ребер, соединяющие одну и ту же пару вершин). Естественно, критерий эйлеровости применим и к мультиграфам тоже.

**1** Принимающий нарисует вам картинку, а вы покажете, как нарисовать ее одним росчерком.

**2** Гуляя по Кёнигсбергу (кстати, что это за город?), Леонард Эйлер захотел обойти город, пройдя по каждому мосту ровно один раз.


a Переведите задачу на язык графов. Сможет ли Эйлер исполнить задуманное?

b Как решил задачу о Кёнигсбергских мостах император Вильгельм II?

**3** Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратиков клетчатого квадрата $4 \times 4$ представить в виде объединения

a пяти ломаных длины 8; b восьми ломаных длины 5?

**4** Есть много кусков проволоки длиной 5 см и много кусков длиной 7 см. Требуется выбрать несколько кусков и спаять из них каркас куба.

a Какая наименьшая длина ребра может быть у этого куба?

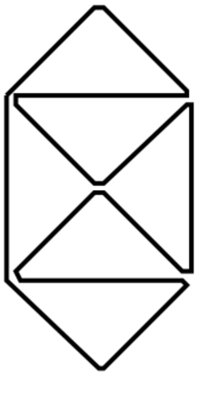
b* А какая наименьшая натуральная длина у него может быть?

**5** Докажите, что любой связный граф можно нарисовать, не отрывая ручки от бумаги и проводя каждое ребро ровно два раза.

**6** В связном графе степени всех вершин четны. Докажите, что на его ребрах можно поставить стрелочки так, чтобы в каждую вершину входило и выходило поровну ребер.

**7** (*Критерий эйлеровости для ориентированного графа*) Докажите, что в связном ориентированном графе существует эйлеров цикл в том и только том случае, когда в каждую вершину входит столько же ребер, сколько выходит.

**8** На отдельных бумажках выписали все девятизначные числа, составленные из цифр 1, 2, . . . , 9 (каждая цифра по одному разу). Можно ли выложить эти бумажки по кругу «по правилам домино» (то есть чтобы каждое следующее число начиналось с той цифры, на которую заканчивается предыдущее)?



**9** На кодовом замке 10 кнопок с цифрами от 0 до 9. Для открытия кодового замка нужно нажать 4 кнопки в определенном порядке (при этом предыдущие нажатия не важны). Докажите, что замок можно наверняка открыть, сделав не более 10003 нажатий.

**10*** Дана картинка, у которой во всех точках сходится четное число линий. Докажите, что ее можно нарисовать одним росчерком без самопересечений (см. картинку справа).