8ВМ, спецкурс, занятие 26
24 марта 2023
Двудольные графы

Определение. *Двудольным* называется граф, вершины которого можно разбить на две группы (*доли*) так, что каждое ребро соединяет вершины из разных долей.

Упражнение 1. Какое максимальное число ребер может быть в двудольном графе с $2n$ вершинами? А с $2n+1$ вершинами?

Упражнение 2. В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. Сколько там девочек, и сколько мальчиков, если всего учеников 24?

Вершины двудольного графа можно покрасить в два цвета так, что концы каждого ребра будут разных цветов (такая раскраска называется *правильной*).

Упражнение 3. На плоскости нарисовано несколько неперекрывающихся равносторонних треугольников, у каждого из которых есть горизонтальная сторона. В каждом треугольнике отметили центр — вершину графа. Если у двух треугольников есть общий отрезок стороны, то соответствующие вершины соединили ребром. Двудолен ли получившийся граф?

В двудольном графе на любом пути вершины из одной доли и из другой чередуются.

Упражнение 4. Треугольный замок разбит на 36 треугольных залов. В каждой стене между залами есть дверь. Какое максимальное число залов может обойти турист, не заходят ни в какой зал дважды?

Теорема (критерий двудольного графа)**.** Граф является двудольным в том и только том случае, когда в нем нет циклов нечетной длины.

Доказательство. Если граф двудольный, то все циклы в нем имеют четную длину (поскольку вершины из одной и из другой доли в нем чередуются).

Пусть в графе все циклы имеют четную длину. Покрасим какую-то его вершину в черный. Все смежные с ней вершины покрасим в белый. Все смежные с этим белыми вершинами покрасим в черный и так далее. Проблема может возникнуть, если в какой-то момент получилось две соседние вершины одного цвета. Но тогда есть нечетный цикл, противоречие. □

Упражнение 5. Являются ли деревья двудольными графами?

Если степени всех вершин в графе равны 2, то каждая компонента связности графа является циклом.

Если степени всех вершин в графе не превышают 2, то каждая компонента связности является отдельной вершиной, циклом или «цепочкой» (путем без разветвлений).

Упражнение 6. В графе 12 вершин степени 1 и 12 вершин степени 2, а других вершин нет. Сколько в этом графе может быть цепочек? А сколько циклов?

Двудольные графы

Во всех задачах сначала сформулируйте, причем здесь графы.

$\boxed{\textbf{1}}$ В школьной столовой продается первое, второе и десерт. Обслуживая учеников 8В класса, повар заметил, что каждый из них взял либо 1, либо все 3 блюда, а каждое блюдо взяло нечётное число учеников. Докажите, что кто-то из 24 учеников 8В вообще не пообедал.

$\boxed{\textbf{2}}$ Можно ли поставить на бесконечную клетчатую доску 25 коней так, чтобы каждый бил ровно 4 других?

$\boxed{\textbf{3}}$ Вершины графа — шестизначные числа. Два числа связаны ребром, если у них на пяти позициях цифры совпадают, а на одной отличаются на 1. Двудолен ли этот граф?

$\boxed{\textbf{4}}$ У куба отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

$\boxed{\textbf{5}}$ На двух клетках шахматной доски стоят чёрная и белая фишки. За один ход можно передвинуть любую из них на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку (две фишки не могут стоять на одной клетке). Могут ли в результате таких ходов встретиться все возможные варианты расположения этих двух фишек, причём ровно по одному разу?

$\boxed{\textbf{6}}$ В каждую вершину связного графа записали произвольное число, затем на каждом ребре записали сумму чисел в его концах, после чего стерли числа в вершинах. Обязательно ли можно восстановить числа в вершинах? Разберите случаи, когда граф является

$\boxed{\text{a}}$ циклом произвольной четной длины;
$\boxed{\text{b}}$ циклом произвольной нечетной длины;
$\boxed{\text{c}}$ произвольным двудольным;
$\boxed{\text{d}}$ произвольным не двудольным.

$\boxed{\textbf{7}}$ Теперь вершины графа нумеруются последовательными числами от 1 до n. Для каких графов удастся восстановить числа в вершинах по суммам на ребрах?

Циклы и цепочки

$\boxed{\textbf{8}}$ 20 школьников решили 20 задач. Каждый решил по 2 задачи, и каждую задачу решило 2 человека. Докажите, что можно попросить каждого школьника рассказать одну из решенных им задач так, чтобы все задачи были рассказаны.

$\boxed{\textbf{9}}$ 25 учеников 7М играли в снежки. Каждый кинул максимум один снежок и в каждого попали максимум одним снежком. Те ученики, в которых попали, очень обиделись на тех, кто в них попал. Найдите максимальный размер команды, которую гарантировано можно собрать из учеников 7М так, чтобы внутри команды никто не был ни на кого обижен.