8ВМ, спецкурс, занятие 25
17 марта 2023

Что мы помним о графах

Графом называется набор объектов (*вершин*), некоторые пары которых находятся в каком-то отношении (соединены *ребрами*).

Граф *связный*, если между любыми двумя его вершинами есть цепочка ребер.

Граф состоит из одной или нескольких *компонент связности.* Каждая компонента является связным графом, а между разными компонентами ребер нет.

Замечание. Иными словами, компоненты связности — это классы эквивалентности относительно отношения «от a можно добраться до b». (Проверьте, что это отношение эквивалентности.)

Степенью вершины графа называется количество выходящих из нее ребер.

Лемма (*о рукопожатиях*)**.** Сумма степеней всех вершин графа четна. Иными словами, в любом графе четное число вершин нечетной степени.

Путем в графе называется последовательность вершин, каждая из которых соединена со следующей ребром. Обычно считают, что путь не может дважды проходить по одному и тому же ребру.

Цикл — это замкнутый путь.

Связный граф без циклов называется *деревом.*

Теорема. Граф является деревом в том и только том случае, когда любые две его вершины соединены единственным простым путем.

Вершина степени 1 в дереве называется *листом* или *висячей вершиной.*

Теорема. Если в дереве больше одной вершины, то в нем есть хотя бы два листа.

Доказательство. Идем по ребрам (не возвращаясь по ребру назад). Мы не можем вернуться в вершину, где уже были (это будет цикл) и не можем до бесконечности приходить во все новые и новые вершины. Поэтому рано или поздно мы придем в тупик (лист).

Теперь стартуем из этого листа и рано или поздно придем в другой лист. □

Теорема (об *остовном дереве*)**.** В любом связном графе можно удалить несколько ребер так, чтобы получилось дерево.

Доказательство. Если в графе есть цикл, удаляем какое-то ребро в нем. Граф остается связным. Действуем так до тех пор, пока не получится дерево. □

Теорема. В дереве с n вершинами ровно $n-1$ ребер.

Доказательство. По индукции: у дерева можно оторвать лист, тогда и число вершин, и число ребер в нем уменьшатся на 1. А в дереве с 1 вершиной 0 ребер. □

Теорема. В связном графе с n вершинами не меньше $n-1$ ребер.

Доказательство. В связном графе ребер не меньше, чем в его остовном дереве. □

Подсчет ребер и вершин. Рукопожатия.

1 В графе из каждой вершины выходит по 7 рёбер. Может ли в нём быть 1543 вершины? А может ли быть 1543 ребра?

2 В связном графе степени всех вершин четны. Одно ребро стерли. Докажите, что граф остался связным.

3 На конгресс съехались физики и лирики. Каждый физик знаком с 5 физиками и 10 лириками, а каждый лирик — с 9 физиками и 6 лириками.

a Кого больше, физиков или лириков, и во сколько раз?

b Какое минимальное число ученых могло быть на этом конгрессе?

Деревья

4 На столе лежит коробочка, внутри которой находятся 7 коробочек. В некоторых из них лежит по семь коробочек, в некоторых из них тоже лежит по семь коробочек, и так далее, а пустых коробочек получилось всего 49. Сколько всего коробочек?

5 В пруд пустили 300 щук, которые постепенно поедают друг друга. Щука считается сытой, если она съела не менее трёх щук (сытых или голодных). Какое наибольшее число щук может насытиться?

6 В марсианском метро с любой станции можно проехать на любую другую. Докажите, что можно так выбрать две станции и закрыть их на ремонт (запретив проезжать через них), что по-прежнему можно будет с любой оставшейся станции проехать на любую другую. (Станций в метро не меньше трех.)

7 a В связном графе 12 вершин и 11 ребер. Обязательно ли этот граф — дерево?

b В связном графе 12 вершин и 12 ребер. Сколько в нем может быть циклов?

Минимальное количество ребер в связном графе

8 В стране 1543 города, некоторые из них соединены железными дорогами. От любого города можно добраться на поезде до любого другого, сделав не больше одной пересадки. Какое минимальное число железных дорог может быть в этой стране?

9 Из веревочек связали волейбольную сетку 15×43. Какое максимальное число разрезов можно сделать, чтобы сетка не распалась на куски?

10 a На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в n клеток. Его контур идёт по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника?

b Квадрат 8×8 разрезали на 3 многоугольника одинакового периметра по линиям сетки. Найдите наибольшее возможное значение этого периметра.