8ВМ, спецкурс, занятие 24

10 марта 2023

Шарики и перегородки

Числа сочетаний C_n^k (они же биномиальные коэффициенты) считают количество способов выбрать k-элементное подмножество из n-элементного множества. Естественно, в подмножествах элементы не повторяются. Но иногда может возникать необходимость считать наборы, в которых один и тот же элемент может встретиться несколько раз.

Задача 1. Даны числа k и n. Сколько решений в натуральных числах есть у уравнения $x_1+x_2+\dots+x_n=k$?

Решение. Положим в ряд k одинаковых шаров $\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$. Можно поставить между некоторыми из них перегородки (всего $n-1$), разделив шары на n групп: $\bigcirc|\bigcirc\bigcirc|\bigcirc\cdots\bigcirc|\bigcirc\bigcirc\bigcirc$. Количество шаров в i-той группе равно x_i.

Итак, мы установили взаимно-однозначное соответствие между натуральными решениями уравнения $x_1+x_2+\dots+x_n=k$ и расположениями перегородок между шариками. Поскольку две перегородки в один промежуток поставить нельзя, то нужно выбрать из $k-1$ промежутков $n-1$, в которых будут стоять перегородки. И всего C_{k-1}^{n-1} расстановок перегородок, то есть C_{k-1}^{n-1} решений уравнения.

Задача 2. Даны числа k и n. Сколько решений в целых неотрицательных числах есть у уравнения $x_1+x_2+\dots+x_n=k$?

Решение 1. Прибавим по 1 к каждому из x_i и получим $(x_1+1)+(x_2+1)+\dots+(x_n+1)=k+n$. Каждая из скобок принимает только натуральные значения, так что мы свели задачу к предыдущей. Получится C_{n+k-1}^{n-1} решений.

Решение 2. Задачу можно свести к расстановке $n-1$ перегородок между k шариками, причем перегородки можно класть с краю и по несколько в один промежуток $|\bigcirc||\bigcirc\bigcirc|\bigcirc\cdots\bigcirc|||\bigcirc\bigcirc\bigcirc||$. Получается, что у нас $n+k-1$ предметов, из которых $n-1$ являются перегородками. Всего способов их разместить C_{n+k-1}^{n-1}.

Задача 3. В магазине продаются конфеты n сортов. Сколькими способами можно купить набор из k конфет?

Решение. Купим x_i конфет сорта i, задача сведется к предыдущей. Получится C_{n+k-1}^{k-1} способов.

Определение. Количество способов выбрать k предметов из n, если один предмет можно выбирать несколько раз, называется *числом сочетаний с повторениями*. Оно обозначается $\overline{C}_n^k=C_{n+k-1}^{n-1}=C_{n+k-1}^{k}$.

Запоминать эту формулу не рекомендуется, буквы n и k в ней путаются со страшной силой. Гораздо полезнее запомнить идею про шарики и перегородки и заново применять ее в каждой задаче.

Замечание. В формуле $C_n^k=\dfrac{n(n-1)\,\dots\,(n-k+1)}{k!}$ подставим $-n$ вместо n и получим

$$C_{-n}^k=\frac{(-n)(-n-1)\,\dots\,(-n-k+1)}{k!}=(-1)^k\frac{(n+k-1)\,\dots\,(n+1)n}{k!}=$$

$$=(-1)^kC_{n+k-1}^k=(-1)^k\overline{C}_n^k.$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ Докажите, что $\overline{C}_n^k = \overline{C}_n^{k-1} + \overline{C}_{n-1}^k$. Постарайтесь придумать и алгебраическое, и комбинаторное доказательство.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{\text{a}}$ Шесть детей решили надуть десять одинаковых воздушных шариков. Сколькими способами могут они распределить эту приятную работу?

$\boxed{\text{b}}$ Как изменится ответ, если каждый ребёнок должен надуть хотя бы один шарик?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Десять пиратов добыли 11 дублонов и 7 пиастров. Сколькими способами они могут разделить добычу? (О справедливости забудьте.)

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\boxed{\text{a}}$ Сколькими способами Дед Мороз может распределить 20 апельсинов между 7 детьми так, чтобы каждый получил чётное число апельсинов? (Те, кто апельсинов не любят, могли получить 0 штук).

$\boxed{\text{b}}$ В конкурсе Деда Мороза участвовали 7 детей. Сколькими способами он мог распределить между ними 40 конфет, если за первое место положено давать не менее 7 конфет, за второе — не менее 6, и т.д. за седьмое — не менее 1 конфеты? (Не обязательно давать больше конфет тому, у кого место выше.)

$\boxed{\mathbf{5}}$ Сколько есть семизначных чисел с суммой цифр $\boxed{\text{a}}$ 9; $\boxed{\text{b}}$ 11; $\boxed{\text{c*}}$ 19?

$\boxed{\mathbf{6}}$ В магазине есть конфеты 15 сортов. Маша хочет купить несколько конфет (возможно одну), но не больше 43. Сколько у нее есть способов это сделать?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Колонна из 20 солдат шла друг за другом по узкому мостику и встретила красивую девушку. Командир приказал «Кругом!», но команду выполнила лишь часть солдат. Известно, что последний выполнил, первый — нет, и лицом к лицу оказались ровно три пары соседей. Сколькими способами могла встать колонна?

Идея кодирования комбинаторных задач при помощи шариков используется не только в задачах на сочетания с повторениями.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Сколькими способами можно выложить в ряд 13 одинаковых грошей и 20 одинаковых алтынов так, чтобы рядом с грошем не было гроша, а рядом с каждым алтыном грош был?

$\boxed{\mathbf{9}}$ Певица приехала в город на две недели. Сколькими способами она может так выбрать три вечера для концерта, чтобы не петь два вечера подряд?

$\boxed{\mathbf{10}}$ В марсианском языке три буквы — А, О и Ъ. По правилам грамматики два твёрдых знака подряд не пишутся, и в слове каждая буква должна встретиться ровно 5 раз. Сколько возможно различных пятнадцатибуквенных слов?