8ВМ, спецкурс, занятие 3
13 сентября 2022
Индукция

Принцип индукции в форме Пеано: Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots$ — последовательность утверждений. Пусть A_1 верно, и мы можем вывести A_{n+1} из A_n для любого n. Тогда верны все утверждения в последовательности.

Обобщенный принцип индукции: Если мы можем вывести утверждение A_{n+1} из всех предыдущих утверждений, и верно утверждение A_1, то верны все утверждения.

Общий вид доказательства по индукции:

База: проверяем, что A_1 верно.

Шаг индукции или индукционный переход: предположим, что утверждения $A_1, A_2, \ldots, A_n$ верны (*предположение индукции*). Пользуясь этим предположением, доказываем, что A_{n+1} верно.

0 a Трехклеточный уголок увеличили в 2^n раз. Докажите, что получившуюся фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки.

b Из квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали произвольную клетку. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки.

1 **Ханойская башня.** Есть три стержня, на один из них надета пирамидка из n колец. Кольца можно переносить со стержня на стержень по следующим правилам:

- кольца можно переносить только по одному
- нельзя откладывать кольца в сторону
- нельзя класть большее кольцо на меньшее

a Докажите, что можно переместить всю пирамидку с одного стержня на другой.

b Докажите, что это можно сделать за $2^n - 1$ ход.

c Докажите, что меньшим числом ходов обойтись нельзя.

2 В Стране Дураков в ходу монеты в 3 и 5 тугриков. Докажите, что ими можно заплатить без сдачи любую сумму, начиная с 8 тугриков.

3 Докажите, что квадрат можно разбить на любое число квадратов (не обязательно равных), большее пяти.

4 Найдите ошибку в следующем рассуждении:

Докажем по индукции, что все коровы имеют одну масть.

База: одна корова, разумеется, имеет одну масть.

Переход: пусть мы уже доказали, что в стаде из n коров они все одной масти. Докажем это для стада из $n+1$ коровы. Отделим какую-нибудь корову и отведем ее в сторону. Оставшиеся n коров по предположению индукции одной масти. Теперь вернем корову в стадо и отделим какую-нибудь другую. Получившееся стадо тоже состоит из n коров, а значит они все одной масти. Получается, что корова, которую мы отделяли вначале, той же масти, что и те $n-1$ коров, которых мы не трогали. А значит, все стадо одной масти, что и требовалось доказать.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Плоскость разбита на несколько частей прямыми линиями. Докажите, что можно покрасить эти части в черный и белый цвета так, чтобы соседние части были разного цвета.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Торт в форме выпуклого многоугольника разрезали ножом по некоторым диагоналям на части (диагонали могут пересекаться). Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что всегда найдётся хотя бы один чистый кусок.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Докажите, что число $\underbrace{11\ldots11}_{3^n \text{ единиц}}$ делится на 3^n.

$\boxed{\mathbf{8}}$ В прямоугольнике $3 \times n$ расставлены красные, желтые и зеленые фишки, по n каждого цвета. Докажите, что фишки в каждой строке можно переставить так, чтобы в каждом столбце все три фишки были разного цвета.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Для каждого натурального числа от $n+1$ до $2n$ включительно выберем наибольший нечётный делитель и сложим все эти делители. Чему будет равна полученная сумма?

$\boxed{\mathbf{10^*}}$ На доске в ряд написали натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Каждое из них не превосходит своего номера ($a_n \leq n$), и сумма всех чисел четна. Докажите, что между ними можно расставить плюсы и минусы так, чтобы значение получившегося выражения было равно 0.