

8ВМ, спецкурс, занятие 23

28 февраля 2023

Треугольник Паскаля и бином Ньютона

Напоминаем вам формулу для чисел сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Вспомните, почему эта формула действительно дает число k -элементных подмножеств в n -элементном множестве.

1 Докажите, что $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$. Постарайтесь придумать и алгебраическое, и комбинаторное доказательство.

Здесь изображены первые строчки *треугольника Паскаля*. В нем по краям стоят единицы, а каждое число в середине равно сумме двух чисел над ним. Строчки нумеруются, начиная с нуля, и числа в строке тоже нумеруются, начиная с нуля (т.е. второе число в четвертой строке треугольника Паскаля равняется 6).

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & \\ & & & & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

2 Докажите (индукцией по номеру строки), что на k -ом месте в n -ой строке треугольника Паскаля стоит число C_n^k .

3 Червяк умеет ползать вниз-влево и вниз-вправо. Докажите, что количество путей червяка от вершины треугольника Паскаля до какой-то его клетки равняется записанному в этой клетке числу.

4 Докажите формулу *бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Числа сочетаний C_n^k поэтому называются еще *биномиальными коэффициентами*.

5 Докажите следующие соотношения тремя способами: комбинаторным, через треугольник Паскаля и через бином Ньютона.

a $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n;$

b $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0.$

6 В выражении $\left(x + \frac{2}{x^3}\right)^{20}$ раскрыли скобки и привели подобные. Найдите слагаемое, не содержащее переменную.

7 Вычислите $1 - 2C_n^1 + 4C_n^2 - \dots + (-1)^n 2^n C_n^n.$

8 В выражении $(1 - 3x + 2x^2)^{10}$ раскрыли скобки. Найдите коэффициент при x^4 .

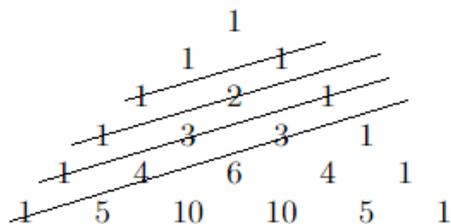
Подсказка: сначала разложите на множители.

9 Докажите соотношение $C_{m+n}^p = C_m^0 C_n^p + C_m^1 C_n^{p-1} + \dots + C_m^k C_n^{p-k} + \dots + C_m^p C_n^0$. Попробуйте найти и комбинаторное, и алгебраическое доказательство.

Исследовательские задачи

В этих задачах от вас не требуется полное решение. Любые продвижения — это уже круто, приносите/присылайте их. Если вам кажется, что вы продвинулись в задаче достаточно далеко, можно будет выступить перед классом и получить за это хорошую оценку.

10 **a** Через единицы на левой стороне треугольника Паскаля проводятся линии под углом 30° вверх-вправо (как на рисунке). Что получится, если сложить числа на каждой линии?



b Попробуйте проводить линии под другими углами. Что будет получаться?

11 **a** Нарисуйте достаточно большой треугольник Паскаля, в котором нечетные числа будут изображены точками одного цвета, а четные — точками другого цвета. Какие закономерности вы видите?

b Докажите, что в строках с номерами 2^n все числа, кроме крайних единиц, четные. А в строках с номерами $2^n - 1$ все числа нечетные.

c Попробуйте красить числа треугольника Паскаля в три цвета в зависимости от остатка от деления на 3. Что получится? В каких строках все числа, кроме крайних единиц, будут делиться на 3?

d А что будет, если красить в зависимости от остатка от деления на простое p ? А если не на простое?

Эту задачу, при желании, можно решать с помощью компьютера. Можно написать программу, рисующую разноцветный треугольник, или воспользоваться электронными таблицами. (Возможно, вам будет проще изображать треугольник сдвинутым к левому краю, чтобы начала всех строк были друг под другом.)