

Зачет по третьей четверти. Программа.

Список теоретических вопросов.

- 1 Рефлексивные, симметричные, транзитивные отношения. Отношения эквивалентности, классы эквивалентности (определения).
- 2 Отношение сравнимости по модулю (определение). Числа сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда они дают одинаковые остатки (доказательство). Простейшие свойства сравнений (формулировки и доказательства).
- 3 Сокращение сравнений на общий множитель вместе с модулем и без него (формулировки и доказательства).
- 4 Деление по модулю. Когда линейное сравнение $ax \equiv b \pmod{m}$ имеет единственное решение? (формулировка критерия и его доказательство)
- 5 Теорема Вильсона (формулировка и доказательство).
- 6 Малая теорема Ферма (формулировка и любое доказательство).
- 7 Китайская теорема об остатках (формулировка и любое доказательство).
- 8 Множества, их элементы, пустое множество. Мощность множества. Подмножества (определения). Простейшие свойства подмножеств (формулировки).
- 9 Количество подмножеств в конечном множестве. Сумма мощностей всех подмножеств (формулировки и доказательства). Подмножеств с четным и нечетным числом элементов поровну (доказательство).
- 10 Операции на множествах, их простейшие свойства. Законы де Моргана (определения, формулировки, доказательства).
- 11 Формула включений-исключений (формулировка и любое доказательство).
- 12 Функция Эйлера, ее явное выражение через разложение числа на простые множители (определение, формулировка, доказательство).

Задачи, подобные которым нужно уметь решать.

1 Найдите остатки от деления:

a $776^{776} + 777^{777} + 778^{778}$ на 3;

b 3^{2023} на 43;

c 2^{70} на 119.

2 Решите линейные сравнения

a $1543x \equiv 2023 \pmod{29}$;

b $36x \equiv 15 \pmod{51}$.

3 Решите квадратные сравнения

a $x^2 + 1533x \equiv 1527 \pmod{1543}$;

b $n^2 + 3n + 1 \equiv 0 \pmod{55}$.

4 Докажите, что число 15431543 не представимо в виде суммы **a** двух;

b трех квадратов.

5 Решите систему сравнений $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{13} \\ x \equiv 4 \pmod{19} \end{cases}$

6 Какие из следующих множеств являются подмножествами друг друга? Какие являются элементами друг друга?

$$A = \{1\}; B = \{1, 2\}; C = \{1, 2, 3\}; D = \{\{1, 2\}, 3\}; E = \{1, \{2\}, 3\};$$

$$F = \{\{2, 1\}\}; X = \emptyset; Y = \{\emptyset\}$$

7 Являются ли тождествами равенства

a $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$;

b $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$?

8 Сколько чисел от 1 до 1000 не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?