# 8ВМ, спецкурс, занятие 22

**10 февраля 2023**

## *Формула включений-исключений*

Решим следующую задачу:

*Самостоятельная работа состояла из двух задач. Первую задачу решило $x$ человек, вторую — $y$ человек, а $z$ человек решило сразу обе задачи. Сколько человек решило хотя бы одну из задач?*

Если сложить $x+y$, то люди, решившие сразу обе задачи, посчитаются два раза. Поэтому один раз их надо вычесть, получится $x+y-z$ человек.

Можно переписать это утверждение в терминах множеств.

**Предложение.** Мощность объединения множеств $A$ и $B$ можно найти по формуле

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|.$$

Попробуем найти такое же выражение для объединения трех множеств.

**Предложение.** Мощность объединения множеств $A$, $B$ и $C$ можно найти по формуле

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|.$$

<ins>Доказательство 1:</ins> несложно убедиться, что каждый элемент объединения считается в выражении справа по одному разу.

<ins>Доказательство 2:</ins>

$$|(A\cup B)\cup C| = |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C| = |A\cup B| + |C| - |(A\cap C)\cup(B\cap C)| =$$

$$= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - (|A\cap C| + |B\cap C| - |(A\cap C)\cap(B\cap C)|) =$$
$$= |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|.$$

**Теорема** (формула включений-исключений)**.** Для $n$ множеств $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ верна формула:

$$|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| -$$
$$-|A_1\cap A_2| - |A_1\cap A_3| - |A_2\cap A_3| - \dots - |A_{n-1}\cap A_n| +$$
$$+|A_1\cap A_2\cap A_3| + |A_1\cap A_2\cap A_4| + \dots + |A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n| - \dots$$
$$+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n|.$$

То есть мощность объединения $n$ множеств можно найти, сложив мощности этих множеств, вычтя из них мощности всех двойных пересечений, прибавив мощности тройных пересечений, вычтя мощности четверных пересечений, и так далее.

<ins>Доказательство 1:</ins> индукцией по числу множеств, аналогично переходу от двух множеств к трем (неприятно).

Для второго доказательства нам потребуется новое определение.

**Определение.** Пусть $X$ — объемлющее множество. *Характеристическая функция* множества $A\subset X$ определяется для всех $x\in X$ следующим образом:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x\in A \\ 0, \text{ если } x\notin A \end{cases}$$

**Предложение.** Характеристическую функцию множества $A \cap B$ можно найти как произведение характеристических функций множеств $A$ и $B$:

$$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x).$$

**Предложение.** Характеристическую функцию множества $\overline{A}$ можно найти как

$$\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

Закон де Моргана утверждает, что $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$. Это позволяет найти характеристическую функцию объединения двух множеств:

**Предложение.** Характеристическую функцию множества $A \cup B$ можно найти по формуле:

$$\chi_{A\cup B}(x) = 1 - \big(1 - \chi_A(x)\big)\big(1 - \chi_B(x)\big).$$

**Предложение.** Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Тогда мощность множества $A$ можно найти по формуле:

$$|A| = \chi_A(x_1) + \chi_A(x_2) + \cdots + \chi_A(x_m).$$

<u>Формула включений-исключений. Доказательство 2:</u> Пусть $X$ — какое-то *объемлющее множество*, включающее в себя все элементы множеств $A_i$ (если в задаче такого нет, то можно взять в качестве $X$ просто объединение $A_i$).

Найдем характеристическую функцию объединения $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

$$\chi_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}(x) = 1 - \big(1 - \chi_{A_1}(x)\big)\big(1 - \chi_{A_2}(x)\big)\,\ldots\,\big(1 - \chi_{A_n}(x)\big).$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\chi_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}(x) = \chi_{A_1}(x) + \chi_{A_2}(x) + \cdots + \chi_{A_n}(x) -$$
$$-\chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(x) - \chi_{A_1}(x)\chi_{A_3}(x) - \chi_{A_2}(x)\chi_{A_3}(x) - \cdots - \chi_{A_{n-1}}(x)\chi_{A_n}(x) +$$
$$+\chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(x)\chi_{A_3}(x) + \chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(x)\chi_{A_4}(x) + \cdots + \chi_{A_{n-2}}(x)\chi_{A_{n-1}}(x)\chi_{A_n}(x) - \ldots$$
$$\cdots + (-1)^{n-1}\chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(x)\,\ldots\,\chi_{A_n}(x).$$

Перепишем эту формулу через пересечения:

$$\chi_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}(x) = \chi_{A_1}(x) + \chi_{A_2}(x) + \cdots + \chi_{A_n}(x) -$$
$$-\chi_{A_1\cap A_2}(x) - \chi_{A_1\cap A_3}(x) - \chi_{A_2\cap A_3}(x) - \cdots - \chi_{A_{n-1}\cap A_n}(x) +$$
$$+\chi_{A_1\cap A_2\cap A_3}(x) + \chi_{A_1\cap A_2\cap A_4}(x) + \cdots + \chi_{A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n}(x) - \ldots$$
$$\cdots + (-1)^{n-1}\chi_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}(x).$$

Наконец, подставим вместо $x$ все элементы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ множества $X$ и просуммируем получившиеся равенства. Вместо каждой характеристической функции у нас получится мощность соответствующего множества и в итоге выйдет как раз формула включений-исключений.

Доказательство 3: Докажем, что в выражении

$$|A_1|+|A_2|+\dots+|A_n|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|-\dots-|A_{n-1}\cap A_n|+$$
$$+|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+\dots+|A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n|-\dots$$
$$+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n|$$

любой элемент из объединения множеств считается ровно один раз. Рассмотрим произвольный элемент $x$, пусть он принадлежит ровно $k$ множествам. То есть $x\in A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$, а остальным множествам $x$ не принадлежит.

Получается, что $x$ принадлежит $C_k^1$ одинарным множествам, $C_k^2$ двойным пересечениям (так как есть $C_k^2$ пар из $k$ множеств), $C_k^3$ тройным пересечениям и так далее.

Тогда $x$ считается ровно $C_k^1-C_k^2+C_k^3-\dots\pm C_k^k$ раз. Поскольку $C_k^0-C_k^1+C_k^2-\dots\pm C_k^k=0$ и $C_k^0=1$, то элемент $x$ считается ровно один раз, что и требовалось доказать.

**1** В летнем лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?

**2** a Сколько чисел от 1 до 1000 не делятся ни на 3, ни на 5?
b Сколько чисел от 1 до 1000 не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

**3** Куб со стороной 20 разбит на 8000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трёх направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1\times20\times20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоёв.

**4** Пол комнаты площадью 6 м$^2$ покрыт тремя коврами, площадь каждого из которых равна 3 м$^2$. Докажите, что какие-то два из этих ковров перекрываются по площади, не меньшей 1 м$^2$.

**5** В равностороннем треугольнике $ABC$ каждая сторона поделена семью точками на восемь равных отрезков. Катя выбирает по одной точке деления на каждой из сторон и рисует треугольник с вершинами в этих точках. Сколькими способами она может выбрать эти точки так, чтобы у получившегося треугольника ни одна сторона не была параллельна ни одной из сторон треугольника $ABC$.

**6** Сколькими способами можно расселить 15 гостей в четырёх комнатах, если требуется, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

**7** В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на своё место?

**8** *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ считает количество остатков по модулю $n$, взаимно простых с $n$. (Например, по модулю 6 есть только два остатка, взаимно простых с 6 — 1 и 5. Поэтому $\varphi(6)=2$.)

a Пусть $p$ — простое число. Найдите $\varphi(p)$.

b Пусть $p$ — простое число. Сколько остатков по модулю $p^a$ делятся на $p$? Найдите $\varphi(p^a)$.

c Пусть $p$ и $q$ — простые числа. Сколько остатков по модулю $p^aq^b$ делятся на $p$? на $q$? на $pq$? Найдите $\varphi(p^aq^b)$.

d Пусть $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_m^{\alpha_m}$. Докажите, что

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_m}\right).$$

**9*** Пусть есть $n$ множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Для элемента $x$ существует $2^n$ вариантов, каким из этих множеств он принадлежит, а каким — нет. Для $n=3$ есть привычная нам картинка из трех кругов Эйлера. Они разбивают плоскость на 8 частей, и каждая часть как раз соответствует одному из 8 вариантов.

А можно ли нарисовать обладающие аналогичным свойством «круги Эйлера» (они должны быть замкнутыми кривыми, но не обязательно кругами) для произвольного числа множеств?