# 8ВМ, спецкурс, занятие 21
## 3 февраля 2023
# *Множества*

В математике *множество* — неопределяемое понятие. Неформально можно определить множество как набор отдельных *элементов*, рассматриваемый как единое целое.

Элементы множества перечисляются в фигурных скобках: $A = \{a,\, x_3,\, 5,\, \pi,\, \clubsuit\}$. *Пустое множество*, в котором нет элементов, обозначается $\varnothing$ (без скобок).

Если элемент $x$ *принадлежит* множеству $A$, это записывается как $x \in A$ (а если нет — $x \notin A$).

Множества (в том чисел пустые) могут быть элементами другого множества. Например, элементами множества $\{3,\, 4,\, \{7,\, 12,\, 29\},\, \varnothing\}$ являются числа 3 и 4, трехэлементное множество $\{7,\, 12,\, 29\}$ и пустое множество $\varnothing$.

Количество элементов в множестве $A$ называется *мощностью* $A$ и обозначается через $|A|$. Например, $|\{3,\, 4,\, \{7,\, 12,\, 29\},\, \varnothing\}| = 4$.

Множества $A$ и $B$ *равномощны*, если их мощности равны. Доказать равномощность можно, установив *взаимно-однозначное соответствие* между элементами $A$ и $B$.

Множества $A$ и $B$ *равны* ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов.

Множество $B$ является *подмножеством* множества $A$ (обозначается $B \subset A$), если все элементы множества $B$ принадлежат и множеству $A$.

**Важно!** Не путайте значки $\in$ («быть элементом», «принадлежать») и $\subset$ («быть подмножеством»).

**Предложение.** Свойства подмножеств:

- $A \subset A$;
- $\varnothing \subset A$ для всех $A$.
- если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$;
- $A = B$ в том и только том случае, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

**Определение.**

- *Объединением множеств* $A$ и $B$ называется множество таких $x$, что $x \in A$ или $x \in B$. Его обозначают $A \cup B$.
- *Пересечением множеств* $A$ и $B$ называется множество таких $x$, что $x \in A$ и $x \in B$. Его обозначают $A \cap B$.
- *Разностью множеств* $A$ и $B$ называется множество таких $x$, что $x \in A$ и $x \notin B$. Ее обозначают $A \setminus B$.
- Пусть все множества, рассматриваемые в данной задаче, являются подмножествами какого-то «объемлющего» множества $X$ (например, если мы рассматриваем различные множества натуральных чисел, то $X = \mathbb{N}$). Тогда *дополнением множества* $A$ называется множество таких $x \in X$, что $x \notin A$. Его обозначают $\overline{A}$.

**Предложение.** Простейшие свойства операций на множествах:

- $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \varnothing = A$;
- $A \cap A = A$, $A \cup A = A$, $A \setminus A = \varnothing$;
- $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$;
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

**1** Сколько элементов в множестве
a $\{1, 2, 3\}$; b букв слова «математика»;
c $\{\{1, 2\},\{1,3\}\}$; d $\{1,\{2, 3\},\{4\}, \varnothing\}$?

**2** Какие из следующих множеств являются подмножествами друг друга?

$$A = \{1\};\ B = \{1, 2\};\ C = \{1, 2, 3\};\ D = \{\{1, 2\}, 3\};\ E = \{1, \{2\}, 3\};$$

$$F = \{\{2, 1\}\};\ X = \varnothing;\ Y = \{\varnothing\}$$

**3** Выпишите все подмножества следующих множеств:
a $\varnothing$; b $\{1\}$; c $\{1, 2\}$; d $\{1, 2, 3\}$; e $\{\{1\}, 2, 3\}$;
f $\{\{1, 2\}, 3\}$; g $\{\varnothing\}$; h $\{\{2, 1\}\}$.

**4** Сколько подмножеств у множества с $n$ элементами?

**5** Каких подмножеств в 58-элементном множестве больше: с 15 элементами или с 43 элементами?

**6** a Каких подмножеств в множестве $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ больше: содержащих 1 или не содержащих 1?
b Докажите, что в множестве $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ подмножеств с четным и с нечетным числом элементов поровну.

**7** Выписали все возможные подмножества множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ и сложили их мощности. Что получилось?

**8** Докажите, что
a $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
b $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
c $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
d $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
Замечание: Тождества c) и d) называются *законами де Моргана.*

**9** Какие из следующих равенств являются тождествами?
a $(A \cup B) \cap C = A \cap (B \cup C)$
b $(A \cap B) \cup C = A \cup (B \cap C)$;
c $(A \setminus B) \cup B = A$;
d $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
e $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
f $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$;
g $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;
h $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

**10** a Можно ли записать пересечение двух множеств, используя только операции разности и объединения?
b Можно ли записать разность двух множеств, используя только операции пересечения и объединения?