8ВМ, спецкурс, занятие 15
16 декабря 2022

Геометрия на клетчатой бумаге

Во всех задачах этого листочка считаем, что сторона клетки равна 1.

Теорема (формула Пика)**.** На листе клетчатой бумаги нарисован многоугольник (возможно, невыпуклый) с вершинами в узлах сетки. Пусть N — количество узлов сетки, целиком лежащих внутри многоугольника, а M — количество узлов сетки, лежащих на границе многоугольника (включая углы).

Тогда площадь многоугольника равна $N+\dfrac{M}{2}-1$.

План доказательства

1. Запишем в каждый узел сетки внутри и на границе многоугольника число от 0 до 1 по следующим правилам:

   - в каждый узел внутри многоугольника пишем 1.
   - в каждый узел на стороне многоугольника пишем 0,5.
   - в каждый угол многоугольника пишем $\dfrac{\alpha}{360^\circ}$, где α — величина этого угла.

   Иными словами, в каждую точку мы пишем, какую долю «поля зрения» человека, стоящего в этой точке, занимает многоугольник.

2. Посчитаем сумму Σ всех записанных в пункте 1 чисел. Оказывается, $\Sigma = N+\dfrac{M}{2}-1$. Это легко вывести из того, что сумма углов K-угольника равна $180^\circ(K-2)$.

3. Величина Σ *аддитивна*. Это означает следующее. Пусть у нас есть многоугольник F с суммой чисел Σ. Мы разрезали его ломаной линией (с вершинами в узлах сетки) на многоугольники F_1 и F_2 с суммами Σ_1 и Σ_2. Тогда $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$.

   Это легко доказать, если думать про Σ в терминах «поля зрения».

4. Докажем, что Σ равна площади многоугольника:

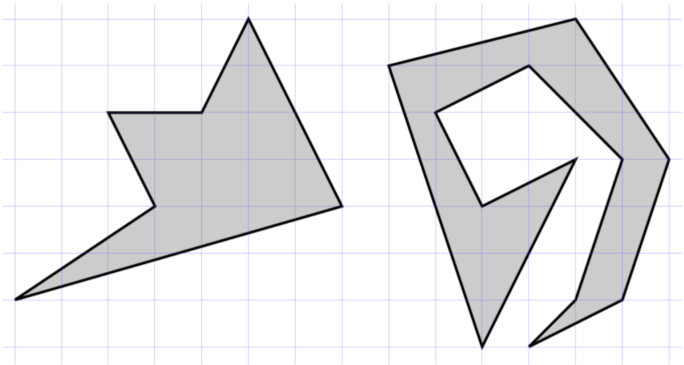
   - Сначала для прямоугольников, прямой проверкой.
   - Потом для прямоугольных треугольников, которые являются половинками прямоугольников.
   - Потом для произвольных треугольников. Их можно получить, отрезав от прямоугольника несколько прямоугольных треугольников.
   - Наконец, для произвольных многоугольников. Их можно составить из нескольких треугольников.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Покажите, что формула Пика не работает на многоугольниках с дырками. Как ее можно исправить, чтобы она работала

$\boxed{\text{a}}$ в случае, если дырка не может касаться сторон многоугольника?

$\boxed{\text{b}}$ в случае, если дырка может касаться сторон многоугольника в одной точке (если она касается в двух или более точках, то многоугольник распадется на несколько, и их площади просто считаются по отдельности).

$\boxed{\mathbf{2}}$ Найдите площадь фигурок:



$\boxed{\mathbf{3}}$ Нарисуйте треугольник с вершинами в узлах сетки, площадь которого равна 0,5, а длины всех сторон больше 5.

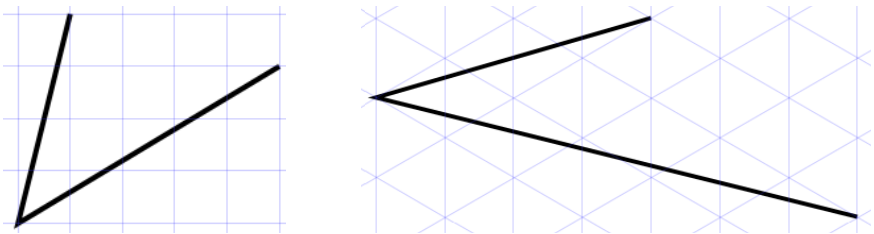
$\boxed{\mathbf{4}}$ Шахматный король обошёл доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз, и последним ходом вернулся на исходное поле. Ломаная, последовательно соединяющая центры полей, не имеет самопересечений.

$\boxed{\text{a}}$ Нарисуйте пример такой ломаной. Какую площадь она ограничивает?

$\boxed{\text{b}}$ Зависит ли эта площадь от того, как именно ходил король?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Нарисуйте неравнобедренный треугольник с вершинами в узлах сетки, у которого есть две перпендикулярные медианы.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Найдите величины углов:



$\boxed{\mathbf{7}}$ На клетчатой бумаге проведена диагональ прямоугольника 1×4. Покажите, как, пользуясь только линейкой без делений, разделить этот отрезок на три равные части.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Нарисуйте квадраты площадью 2 клетки, 5 клеток, 10 клеток, 13 клеток с вершинами в узлах сетки.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Разрежьте квадраты $a \times a$ и $b \times b$ клеток на несколько частей и сложите из них один квадрат.

$\boxed{\mathbf{10}}$ У Стёпы есть кубик с ребром 5 см. Он захотел оклеить его бумагой и попросил младшую сестру Полину вырезать ему из клетчатой бумаги (сторона клеточки равна 1 см) шесть квадратов площади 25 см^2. Полина немного перепутала задание и вырезала шесть квадратов площади 20 см^2 и ещё шесть квадратов площади 5 см^2. Сможет ли теперь Стёпа оклеить свой куб? (Квадраты можно перегибать через ребро куба, но нельзя разрезать на части.)