

8ВМ, спецкурс, занятие 2

7 сентября 2022

Последовательности-2

Последовательности записываются при помощи нижних индексов: a_1, a_2, a_3, \dots . Через a_n обозначается элемент последовательности с номером n .

Последовательность можно задать разными способами:

- Выписав первые несколько ее членов. Например, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots
- Описанием. Например, «последовательность квадратов натуральных чисел».
- Формулой. Например, $a_n = n^2$.
- Рекуррентно, то есть выражая каждый следующий член последовательности через предыдущие. В этом случае обязательно нужно указать один или несколько первых членов. Например, $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = a_n + (2n + 1)$.

1 Задайте последовательность формулой:

- a** 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots
- b** 9, 27, 81, 243, 729, \dots
- c** 1, 3, 6, 10, 15, \dots
- d** -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots
- e** 17, 27, 47, 87, 167, 327, \dots

2 Задайте последовательность рекуррентно:

- a** 3, 3, 3, 3, 3, 3, \dots
- b** 1543, 1545, 1547, 1549, \dots
- c** 1, 2, 6, 24, 120, \dots
- d** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots
- e** 0,3, 0,33, 0,333, 0,3333, 0,33333 \dots

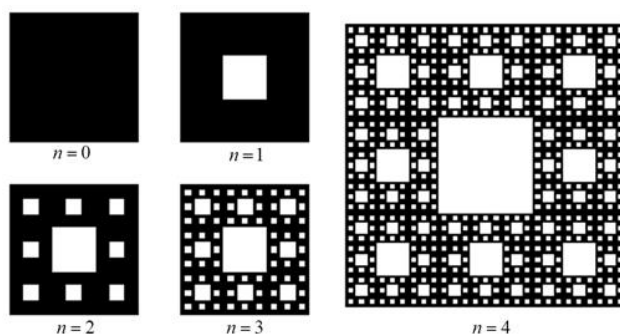
3 Последовательность задана рекуррентно: $s_1 = 1, s_{n+1} = |2s_n - 11|$.
Найдите s_{1543} .

4 Тимур посмотрел на свои оценки по алгебре и ужаснулся: 5, 2, 5, 2, 5, 2, \dots .
Задайте последовательность его текущих (и ожидаемых в будущем) оценок

- a** рекуррентно;
- b** формулой.

5 Верно ли, что рекуррентное соотношение $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ задает ту же последовательность, что и формула $a_n = 3^n - 2^n$?

6 Такой квадрат с дырками называется *ковром Серпинского*. Сколько дырок в его n -ной итерации? Запишите рекуррентное соотношение и явную формулу.



7 **a** Пусть p_n — количество способов разрезать полосу $1 \times n$ на квадратики 1×1 и доминошки 1×2 . Задайте последовательность p_1, p_2, p_3, \dots рекуррентно.

b Докажите, что число способов разрезать прямоугольник $2 \times n$ на доминошки 1×2 тоже равно p_n .

c Докажите, что число «слов» длины n из букв У и Ы, не содержащих двух букв Ы подряд, равно p_{n+1} .

8 Пусть t_n — число способов разрезать прямоугольник $3 \times n$ на полосы 1×3 . Найдите t_{15} .

9* Последовательность определяется так: первые её члены — 1, 2, 3, 4, 5. Далее каждый следующий (начиная с 6-го) равен произведению всех предыдущих членов минус 1. Докажите, что сумма квадратов первых 70 членов последовательности равна их произведению.