На 5+

$\boxed{\mathbf{1}}$ На числовой прямой в во всех точках с целыми номерами находятся лампочки. На каждой лампочке есть кнопка, при нажатии на которую лампочка меняет состояние: загорается или гаснет.

У вас есть шаблон — какой-то набор из нескольких целых чисел. Его можно перемещать вдоль числовой прямой как жесткую фигуру. Приложив шаблон в каком-то месте, можно одновременно нажать на кнопки у всех лампочек, закрытых шаблоном. Например, если у вас есть шаблон $\{1, 2, 4\}$, то можно нажать на кнопки у лампочек 7, 8, 10 или у лампочек -3, -2, 0.

Вначале горит только лампочка №0. Будем каждый раз прикладывать левую границу шаблона к самой левой горящей лампочке. Докажите, что в какой-то момент опять будет гореть только одна лампочка.

Будем считать состоянием системы количество и взаимное расположение горящих лампочек. А где именно они расположены на прямой, мы учитывать не будем. Заметим следующие факты:

1) Каждый раз мы прикладываем шаблон правее, чем в прошлый раз.

2) Длина отрезка от самой левой горящей лампочки до самой правой меньше длины шаблона, поэтому число состояний конечно.

3) Можно восстановить предыдущее состояние по следующему, приложив шаблон правым краем к самой правой горящей лампочке. А следующее состояние, естественно, однозначно получается по предыдущему.

Поэтому система зациклится без предпериода и рано или поздно у нас опять будет одна горящая лампочка.

$\boxed{\mathbf{2}}$ В 43-элементном множестве выделено 32 подмножества, в каждом по 6 элементов. Докажите, что можно покрасить элементы множества в черный и белый цвет так, чтобы в каждом выделенном подмножестве были и черные, и белые элементы.

Это внезапно задача на теорию вероятностей. Будем красить элементы случайным образом и докажем, что вероятность того, что все подмножества разноцветные, больше нуля.

Пусть событие A_i — «в i-том подмножестве все элементы одноцветны». $P(A_i)=2/64=1/32$. Поэтому $P(A_1 \text{ или } A_2 \text{ или } \ldots \text{ или } A_{32}) < P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_{32})=1$. Неравенство строгое, потому что события A_i не являются несовместными (например, есть полностью одноцветные раскраски). Значит, вероятность того, что хотя бы одно из подмножеств одноцветно, меньше 1, из чего и следует требуемое.

$\boxed{\mathbf{3}}$ В классе каждый болтун дружит хотя бы с одним молчуном. При этом болтун молчит, если в кабинете находится нечетное число его друзей – молчунов. Докажите, что учитель может пригласить на факультатив не менее половины класса так, чтобы все болтуны молчали.

Индукция по числу m молчунов в классе. Если молчун один, то можно звать всех.

Теперь пусть для $m \leq M$ молчунов мы уже все доказали. Докажем для $M+1$. Возьмем одного из молчунов (Колю) и всех его друзей-болтунов, и отведем их в сторону. Из остальных по предположению индукции выделим компанию F приглашенных на факультатив, их не меньше половины.

Теперь посмотрим на Колиных друзей-болтунов. Можно добавить к F либо тех, кто дружит с нечетным числом молчунов из F, либо Колю и тех, кто дружит с четным числом молчунов из F. В каком-то из этих вариантов мы добавим не меньше половины изначально отведенных в сторону людей, и это будет победой.