

1 На числовой прямой в во всех точках с целыми номерами находятся лампочки. На каждой лампочке есть кнопка, при нажатии на которую лампочка меняет состояние: загорается или гаснет.

У вас есть шаблон — какой-то набор из нескольких целых чисел. Его можно перемещать вдоль числовой прямой как жесткую фигуру. Приложив шаблон в каком-то месте, можно одновременно нажать на кнопки у всех лампочек, закрытых шаблоном. Например, если у вас есть шаблон $\{1, 2, 4\}$, то можно нажать на кнопки у лампочек 7, 8, 10 или у лампочек $-3, -2, 0$.

Вначале горит только лампочка №0. Будем каждый раз прикладывать левую границу шаблона к самой левой горящей лампочке. Докажите, что в какой-то момент опять будет гореть только одна лампочка.

2 В 43-элементном множестве выделено 32 подмножества, в каждом по 6 элементов. Докажите, что можно покрасить элементы множества в черный и белый цвет так, чтобы в каждом выделенном подмножестве были и черные, и белые элементы.

3 В классе каждый болтун дружит хотя бы с одним молчуном. При этом болтун молчит, если в кабинете находится нечетное число его друзей — молчунов. Докажите, что учитель может пригласить на факультатив не менее половины класса так, чтобы все болтуны молчали.