8ВМ, спецкурс
13 декабря 2022
Зачет по первому полугодию. Программа.

Список теоретических вопросов.

Все определения и формулировки можно найти в предыдущих листочках, а листочки — на сайте.

1 Последовательности. Способы задания последовательностей (с примерами).

2 Принцип индукции в форме Пеано. Обобщенный принцип индукции (формулировки).

3 Принцип наименьшего элемента (формулировка). Его применение для доказательства теорем (рассказать идею в общем виде или объяснить на примере).

4 Периодические последовательности, период, предпериод (определения). Однозначно ли выделяются период и предпериод?

5 Теоремы о зацикливании вперед и назад (формулировки). Уметь на каком-нибудь нетривиальном примере пояснять, что такое «система» и ее «состояние».

6 Делимость нацело. НОД и НОК. Делимость с остатком (определения).

7 Прямой алгоритм Евклида (зачем нужен, в чем состоит, почему работает).

8 Обратный алгоритм Евклида (зачем нужен, в чем состоит).

9 Линейные диофантовы уравнения с двумя переменными (что это такое и как их решать).

10 Лемма Евклида. Основная теорема арифметики (формулировки). Разложение числа на простые множители в общем виде.

11 Вероятность. Элементарные исходы, вероятностное пространство, события, вероятность события (определения и примеры).

12 Независимые события. Несовместные события. Полная система событий (определения и примеры).

13 Условная вероятность (определение, примеры).

14 Формула полной вероятности. Формула Байеса (формулировки).

Список задач

Числа и другие детали в задачах могут меняться. От вас требуется не выучить наизусть решения всех задач, а разобраться в них и быть готовым воспроизвести соответствующие рассуждения.

1 Задайте последовательность формулой:
- a) 9, 27, 81, 243, 729, . . .
- b) 1, 3, 6, 10, 15, . . .
- c) 17, 27, 47, 87, 167, 327, . . .
- d) 1, 5, 1, 5, 1, 5, . . .

$\boxed{\mathbf{2}}$ Задайте последовательность рекуррентно:

$\boxed{\text{a}}$ 1, 2, 6, 24, 120, . . .

$\boxed{\text{b}}$ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . .

$\boxed{\text{c}}$ 0,3, 0,33, 0,333, 0,3333, 0,33333 . . .

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\boxed{\text{a}}$ Трехклеточный уголок увеличили в 2^n раз. Докажите, что получившуюся фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки.

$\boxed{\text{b}}$ Из квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали произвольную клетку. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки.

$\boxed{\mathbf{4}}$ **Ханойская башня.** Есть три стержня, на один из них надета пирамидка из n колец. Кольца можно переносить со стержня на стержень по следующим правилам:

- кольца можно переносить только по одному
- нельзя откладывать кольца в сторону
- нельзя класть большее кольцо на меньшее

$\boxed{\text{a}}$ Докажите, что можно переместить всю пирамидку с одного стержня на другой.

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что это можно сделать за $2^n - 1$ ход.

$\boxed{\text{c}}$ Докажите, что меньшим числом ходов обойтись нельзя.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Плоскость разбита на несколько частей прямыми линиями. Докажите, что можно покрасить эти части в черный и белый цвета так, чтобы соседние части были разного цвета.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Докажите <u>по индукции</u> соотношения:

$\boxed{\text{a}}$ $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

$\boxed{\text{b}}$ $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Последовательность a_n задана формулой:

$$a_n = (n+1)^2 - 5n.$$

Последовательность b_n задана рекуррентно:

$$b_1 = -1,\, b_2 = -1,\, b_3 = 1,\ \ b_{n+3} = 3b_{n+2} - 3b_{n+1} + b_n.$$

Докажите по индукции, что эти две последовательности совпадают.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Докажите, что в последовательности чисел Фибоначчи не найдется двух последовательных чисел, делящихся на 7.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Докажите, что любое натуральное число раскладывается на простые множители.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Докажите, что не существует таких натуральных x, y, z, что $9x^3+3y^3=z^3$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Найдите последнюю цифру $23^{45}+32^{54}$.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Какая цифра стоит на 100-м месте после запятой в десятичной записи числа $\dfrac{3}{14}$?

$\boxed{\mathbf{13}}$ Придумайте непериодическую последовательность, состоящую только из 1 и 2. Докажите, что она действительно непериодическая.

$\boxed{\mathbf{14}}$ У последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ есть период длины 7. Докажите, что последовательность $a_{10}, a_{20}, a_{30}, \ldots$ периодическая.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Маша упражняется в счете, выписывая очень длинную последовательность цифр. Первые две цифры ей написала Анна Алексеевна, а каждая следующая цифра в последовательности равна последней цифре суммы двух предыдущих (например, после $\ldots, 7, 9$ она пишет 6 — последнюю цифру $7+9=16$). Докажите, что эта последовательность рано или поздно зациклится.

$\boxed{\mathbf{16}}$ Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что всегда можно вернуть его в исходное состояние, выполнив эту комбинацию еще несколько раз.

$\boxed{\mathbf{17}}$ В городе Энске есть несколько площадей, соединенных улицами. От каждой площади отходит ровно три улицы. Участник соревнований по городскому ориентированию стартовал на площади Революции и ходит по улицам, на каждой площади сворачивая поочередно то направо, то налево. Докажите, что рано или поздно он вернется на площадь Революции.

$\boxed{\mathbf{18}}$ При помощи алгоритма Евклида найдите $\boxed{\text{a}}$ $(720, 378)$; $\boxed{\text{b}}$ $(2^{32}+1, 2^{16}+1)$; $\boxed{\text{c}}$ $(2^{91}-1, 2^{63}-1)$; $\boxed{\text{d}}$ $(\underbrace{11\ldots11}_{100\text{ единиц}}, \underbrace{11\ldots11}_{60\text{ единиц}})$.

$\boxed{\mathbf{19}}$ При помощи обратного алгоритма Евклида найдите такие целые x и y, что $71x+33y=1$.

$\boxed{\mathbf{20}}$ Найдите все $\boxed{\text{a}}$ целые; $\boxed{\text{b}}$ натуральные решения уравнения $162x+46y=2000$.

$\boxed{\mathbf{21}}$ $\boxed{\text{a}}$ Пусть числа a и b разложены на простые множители: $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ и $b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k}$. Найдите разложения НОД$(a, b)=(a, b)$ и НОК$(a, b)=[a, b]$.

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что $a\cdot b=(a, b)\cdot[a, b]$.

$\boxed{\mathbf{22}}$ Число n не является точным квадратом. Докажите, что не существует таких натуральных чисел x и y, что $x^2=ny^2$.

$\boxed{\mathbf{23}}$ Найдите наименьшее такое число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 — остаток 2, при делении на 4 — остаток 3,..., при делении на 10 — остаток 9.

$\boxed{\mathbf{24}}$ У Коли есть две кривые монеты: красная, на которой решка выпадает с вероятностью 0,4, и синяя, на которой решка выпадает с вероятностью 0,7. Коля кидает эти монеты одновременно.

$\boxed{\text{a}}$ Как выглядит вероятностное пространство этой задачи?

$\boxed{\text{b}}$ Найдите вероятность события «выпадет хотя бы одна решка».

$\boxed{\mathbf{25}}$ $\boxed{\text{a}}$ Случайным образом выбирается натуральное число от 1 до 105 (все числа равновероятны). Являются ли события «выбранное число делится на 5» и «выбранное число делится на 7» независимыми?

$\boxed{\text{b}}$ А если число выбирается из промежутка от 1 до 100?

26 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 95% яиц из первого хозяйства и 20% яиц из второго хозяйста — яйца высшей категории. Всего высшую категорию получает 65% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

27 Ужасной болезнью «спидорак» болеет в среднем 1 человек из 10000. У новейших тестов на спидорак вероятность ложноположительного результата равна 5% (то есть 5% здоровых людей тест показывает, что они больны), а вероятность ложноотрицательного результата равна 0,1% (то есть у 0,1% больных людей тест заболевание не выявляет). Тест показал положительный результат. С какой вероятностью человек на самом деле болен спидораком?

28 Анна Алексеевна выставляет оценки 15 ученикам 8ВМ. Каждому ученику она с равной вероятностью ставит двойку, тройку, четверку или пятерку. (Оценки разных учеников независимы.) С какой вероятностью хотя бы кто-то получит двойку?

29 В ящике имеется 10 белых и 15 черных шаров. Из ящика вынимаются 4 шара.

a Найдите вероятность того, что все вынутые шары будут белыми.

b Найдите вероятность того, что вытащили три белых и один черный шар.

30 В классе 23 человека. С какой вероятностью хотя бы у двух школьников в этом классе дни рождения совпадают?