8ВМ, спецкурс, занятие 13
25 ноября 2022

Теория вероятностей и комбинаторика

Комбинаторикой называется раздел математики, посвященный подсчету различных объектов. Вспомним решения трех основных комбинаторных задач.

$\boxed{\mathbf{1}}$ (Задача о числе перестановок) Сколькими способами можно выложить в ряд n различных предметов?

Решение: на первое место можно положить любой из n предметов. После этого на второе место можно положить любой из $n-1$ оставшихся предметов. На третье место — любой из $n-2$ оставшихся предметов, и так далее. На предпоследнее место можно положить любой из 2 оставшихся предметов, а на последнее — 1 оставшийся предмет.

Таким образом, способов всего

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Определение. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n называется *факториалом* и обозначается $n!$ (читается «n факториал»).

$\boxed{\mathbf{2}}$ (Задача о числе подмножеств) Есть n различных предметов. Сколькими способами можно выбрать несколько из них (возможно, ни одного или все)?

Решение: первый предмет мы можем выбирать или не выбирать — всего 2 варианта. Второй предмет мы тоже можем выбирать или не выбирать. И третий, и все остальные тоже. Таким образом, для каждого из n предметов есть по два варианта. А всего способов:

$$2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2 = 2^n.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (Задача о числе сочетаний) Есть n различных предметов. Сколькими способами можно выбрать ровно k из них?

Определение. Количество способов выбрать k предметов из набора с n предметами обозначается C_n^k (читается «цэ из n по k») и называется *числом сочетаний.* В неформальной речи иногда употребляют слово «цэшка».

Решение: Найдем формулу для C_n^k. Для этого решим немного другую задачу. Пусть у нас есть n карт, и мы хотим выложить какие-то k из них в ряд.

На первое место положим любую из n карт. На второе — любую из $n-1$ оставшихся карт. На третье — любую из $n-2$ оставшихся карт, и так далее. На k-тое место мы положим любую из $n-k+1$ карт. (Обратите внимание на это «$+1$»: мы уже положили $k-1$ карту, значит осталось $n-(k-1)=n-k+1$.) Итак, выложить k карт в ряд мы можем $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ способами.

Но эту задачу можно решить и по-другому. Сначала выберем k карт из n одним из C_n^k способов. А потом разложим выбранные карты в ряд одним из $k!$ способов. Значит, выложить k карт в ряд перед собой мы можем $C_n^k \cdot k!$ способами.

Два полученных ответа должны совпадать. Поэтому

$$C_n^k \cdot k! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Обратите внимание, что и в числителе, и в знаменателе этой дроби мы перемножаем по k множителей.

Покажем, как записать полученную формулу в более кратком виде. Домножим числитель и знаменатель дроби на одни и те же множители:

$$C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot\boldsymbol{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{k!\cdot\boldsymbol{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}.$$

Сверху получилось произведение всех чисел от 1 до n, то есть $n!$. А снизу — произведение $k!$ на $(n-k)!$. Итого

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Для вычисления «цэшек» больше подходит развернутая формула, поскольку в ней проще сокращать. Например,

$$C_{10}^6 = \frac{10\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}}{\cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 210.$$

А если нужно доказать какие-то соотношения на «цэшки» в общем виде, то удобнее использовать короткую формулу с факториалами.

Замечание. В ответах на комбинаторные задачи можно использовать степени n^k, факториалы $n!$ и числа сочетаний C_n^k, не вычисляя их. Например, выражение $(2^{43} - C_{43}^{15})\cdot 15!$ — это вполне допустимый ответ.

Решим еще теоретико-вероятностную задачу задачу, не связанную напрямую с комбинаторикой, но иллюстрирующую один очень полезный принцип.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Анна Алексеевна выставляет оценки 15 ученикам 8ВМ. Каждому ученику она с равной вероятностью ставит двойку, тройку, четверку или пятерку. (Оценки разных учеников независимы.) С какой вероятностью хотя бы кто-то получит двойку?

Решение: можно попробовать рисовать дерево. Первый получит двойку с вероятностью $\frac{1}{4}$. Первый не получит двойку, а второй получит с вероятностью $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$. Первые двое не получат двойку, а третий получит с вероятностью $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$. И так далее. Общую вероятность можно найти как сумму

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{14} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{14}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{15}}{1-\frac{3}{4}} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{15}.$$

Решение 2: эту задачу можно решить гораздо проще. Вычислим вероятность того, что никто не получит двойку. Каждый из учеников получает не двойку с вероятностью $\frac{3}{4}$, тогда все 15 обойдутся без двоек с вероятностью $\left(\frac{3}{4}\right)^{15}$. А хотя бы кто-то получит двойку с вероятностью $1-\left(\frac{3}{4}\right)^{15}$.

Идея, использующаяся в решении 2, очень важная. Часто бывает, что вычислить вероятность события A сложно, а вероятность события «не A» — намного проще. В этом случае можно воспользоваться формулой $P(A) = 1 - P(\text{не } A)$.

Большую часть этих задач можно решать как с использованием комбинаторных методов и объектов, описанных в тексте до этого, так и чисто вероятностными способами. Действуйте так, как вам удобнее.

1 Есть три мешка, в каждом из которых лежит 10 шаров с номерами от 0 до 9. Из каждого мешка случайным образом вытаскивают по одному шару. С какой вероятностью все три номера на шарах будут разными?

2 Монету бросили 10 раз подряд. С какой вероятностью выпало ровно 4 орла?

3 В ящике имеется 10 белых и 15 черных шаров. Из ящика вынимаются 4 шара.

a Найдите вероятность того, что все вынутые шары будут белыми.

b Найдите вероятность того, что вытащили три белых и один черный шар.

4 Герман тянет три карты из тщательно перемешанной колоды (52 карты). С какой вероятностью он вытянет тройку, семёрку и туза (любых мастей):

a именно в таком порядке;

b в произвольном порядке?

c С какой вероятностью он вытянет тройку, семёрку и пиковую даму (в произвольном порядке)?

5 В классе 24 человека, из них 10 девочек и 14 мальчиков. По сигналу учителя физкультуры они быстро построились в одну шеренгу в случайном порядке. Найдите вероятность того, что на концах шеренги будут стоять школьники одинакового пола.

6 В лотерее выпущено n билетов, m из которых выигрывают. Толя купил k билетов. Какова вероятность того, что по крайней мере один из купленных билетов — выигрышный?

7 В классе 23 человека. С какой вероятностью хотя бы у двух школьников в этом классе дни рождения совпадают? (Сначала запишите точное выражение, а затем при помощи компьютера вычислите его приблизительное значение.)

8 Из полной колоды карт (52 карты) Вася вытянул наугад 10 карт.

a С какой вероятностью среди них есть хотя бы один туз?

b Известно, что у Васи есть туз. С какой вероятностью у него есть и второй туз?

c Известно, что у Васи есть туз пик. С какой вероятностью у него есть и второй туз?

(Во всех пунктах сначала запишите точное выражение, а затем при помощи компьютера вычислите его приблизительное значение.)

9 Монету бросают 10 раз. Какова вероятность того, что ни разу не случится две решки подряд?

10 Король Артур проводит рыцарский турнир по олимпийской системе (в каждом туре рыцари разбиваются на пары и бьются друг с другом, проигравший выбывает). Среди 2^n одинаково искусных рыцарей есть два близнеца. С какой вероятностью они встретятся в финале?