8ВМ, спецкурс, занятие 11

11 ноября 2022

Теория вероятностей-1

$\boxed{\mathbf{0}}$ Как вы понимаете предложения

$\boxed{\text{a}}$ «На кривой монете решка выпадает с вероятностью 40%»;

$\boxed{\text{b}}$ «Аргентина выиграет Чемпионат Мира с вероятностью 13%»?

Представьте себе, что мы раз за разом повторяем один и тот же опыт, у которого могут быть разные результаты (бросаем монетку или кубик, вытаскиваем шарик из чаши, включаем генератор случайных чисел...). В этом случае можно говорить о *вероятностях* этих результатов.

Определение. *Элементарный исход* — результат одного опыта. Слово «элементарный» часто опускают.

Вероятностное пространство — совокупность всех возможных элементарных исходов $a, b, c, \ldots,$ для каждого из которых указана его вероятность $P(a), P(b), P(c), \ldots$. Сумма всех этих вероятностей обязательно должна быть равна единице.

Событие — некоторое подмножество A вероятностного пространства (то есть некоторый набор элементарных исходов). Иногда об исходах, входящих в событие, говорят как о *благоприятных*, а о не входящих — как о *неблагоприятных*.

Вероятность $P(A)$ события A — сумма вероятностей входящих в него элементарных исходов.

Пример. В урне лежит восемь шаров с номерами 1, 5, 4, 3, 2, 0, 2, 2. Вася наугад вытаскивает один из шаров и записывает его номер.

В этом случае вероятностное пространство состоит из элементарных исходов 0, 1, 2, 3, 4, 5 с вероятностями $P(0) = P(1) = P(3) = P(4) = P(5) = 1/8$ и $P(2) = 3/8$.

Рассмотрим событие A «Вася вытащит шар с номером, дающим остаток 2 при делении на 3». Оно состоит из исходов $2, 5$, и его вероятность равна $P(A) = P(2) + P(5) = 3/8 + 1/8 = 1/2$.

Вероятностное пространство можно выбирать по-разному. Скажем, в примере можно считать шары с двойками разными, тогда вероятностное пространство состоит из восьми элементарных исходов: $1, 5, 4, 3, 2_1, 0, 2_2, 2_3$, вероятность каждого из которых равна $1/8$.

Или же можно считать элементарными исходами остатки от деления номеров шаров на 3. Тогда вероятностное пространство состоит из исходов $0, 1, 2$, и $P(0) = 1/4$; $P(1) = 1/4$; $P(2) = 1/2$.

Определение. События A и B называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно.

В этом случае $P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$.

Определение. События A и B называются *независимыми*, если вероятность одновременного их наступления равна произведению отдельных вероятностей этих событий:

$$P(A \text{ и } B) = P(A)P(B).$$

События, относящиеся к разным броскам монет или кубиков, считаются независимыми.

$\boxed{\textbf{1}}$ Часто бывает, что все элементарные исходы *равновероятны* (то есть имеют одинаковые вероятности). Докажите, что в этом случае вероятность события A можно вычислить по формуле

$$P(A) = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{общее число исходов}}.$$

$\boxed{\textbf{2}}$ У Коли есть две кривые монеты: красная, на которой решка выпадает с вероятностью 0,4, и синяя, на которой решка выпадает с вероятностью 0,7. Коля кидает эти монеты одновременно.

$\boxed{\text{a}}$ Как выглядит вероятностное пространство этой задачи?

$\boxed{\text{b}}$ Найдите вероятность события «на обеих монетах выпадет одно и то же».

$\boxed{\textbf{3}}$ Честную монету кинули три раза. Найдите вероятность того, что выпало два орла и одна решка.

$\boxed{\textbf{4}}$ Вася и Петя играют в кости. Каждый из них кидает по одному «честному» кубику (на котором все грани выпадают с равной вероятностью). Найдите вероятности событий

$\boxed{\text{a}}$ «сумма очков на кубиках равна 8»;

$\boxed{\text{b}}$ «у Васи выпало больше очков, чем у Пети»;

$\boxed{\text{c}}$ «произведение очков на кубиках заканчивается цифрой 6».

$\boxed{\textbf{5}}$ Вася из предыдущей задачи подменил честный кубик на шулерский. На нем числа от 1 до 5 выпадают с вероятностью 0,1, а число 6 выпадает с вероятностью 0,5. Какими теперь станут вероятности событий из предыдущей задачи?

$\boxed{\textbf{6}}$ Двое мальчиков кидают из окна водяные бомбочки. Первый попадает в цель с вероятностью 0,2, а второй с вероятностью 0,3. Оба одновременно кинули по бомбочке в проходящую под окнами учительницу Марьиванну. С какой вероятностью хотя бы один из них попадет в цель?

$\boxed{\textbf{7}}$ $\boxed{\text{a}}$ Случайным образом выбирается натуральное число от 1 до 105 (все числа равновероятны). Являются ли события «выбранное число делится на 5» и «выбранное число делится на 7» независимыми?

$\boxed{\text{b}}$ А если число выбирается из промежутка от 1 до 100?

$\boxed{\textbf{8}}$ На шахматную доску 8×8 случайным образом ставят двух королей (сначала равновероятно выбирается клетка для первого короля, потом среди оставшихся клеток равновероятно выбирается клетка для второго короля). Какова вероятность того, что короли не бьют друг друга?

$\boxed{\textbf{9}}$ В жюри из трех человек вердикт выносят большинством голосов. Председатель и второй член жюри принимают верное решение независимо с вероятностями 0,7 и 0,9 соответственно, а третий для этого бросает монету. Как изменится у жюри вероятность вынести верное решение, если третий начнет копировать решение председателя?

$\boxed{\textbf{10}}$ Отец, мать и сын увлекаются шахматами. Отец обещает сыну приз, если он выиграет две партии подряд из трех, сыгранных поочередно с отцом и матерью. Сын знает, что отец играет лучше матери. С кем ему выгоднее играть первую партию?