

8ВМ, спецкурс, занятие 10

21 октября 2022

Разнобой

1 В купе поезда собрались десять мудрецов. Окно было открыто, и когда поезд въехал в туннель, в него влетело облако сажи и перепачкало лица семи мудрецам. Поезд выехал из тоннеля, и все увидели испачканные лица других, но были слишком тактичны, чтобы сказать об этом. Грязь же на своем лице никто не почувствовал, и все продолжали считать себя чистыми.

В купе вошел проводник и сказал: «Господа, у некоторых из вас перепачканы лица. На каждой станции поезд стоит достаточно долго, так что испачкавшиеся могут выйти и умыться». Несколько станций никто из мудрецов не реагировал, а потом вдруг все грязные встали и пошли умываться. На какой станции это произошло?

Подсказка: разберите сначала случай, когда был один испачканный мудрец. Потом когда два, и так далее.

2 Город окружен кольцевой дорогой с односторонним движением. Также в городе есть несколько проспектов с односторонним движением, которые начинаются и заканчиваются на кольцевой дороге. Эти проспекты разбивают город на кварталы. Докажите, что вокруг какого-то из этих кварталов можно объехать, не нарушая правил дорожного движения.

3 Докажите, что найдутся две степени двойки, разность которых делится на 1543.

4 Найдите все натуральные решения уравнения $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{25}$.

5 Перед боем с белогвардейцами у Василия Ивановича и Петьки было поровну патронов. Василий Иванович израсходовал в бою в 8 раз меньше патронов, чем Петька, а осталось у него в 9 раз больше патронов, чем у Петьки. Докажите, что изначально количество патронов у Василия Ивановича делилось на 71.

6 Программист Вася написал программу, которая находит НОК всех чисел от 1 до 100. Хакер Петя стер часть кода, и теперь программа находит НОК чисел от 51 до 100. Как изменится ответ?

7 Филателист Андрей решил разложить все свои марки поровну в 3 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок. Сколько всего марок у Андрея, если известно, что недавно он купил для них дополнительный альбом, вмещающий 150 марок, так как такого же старого альбома уже не хватало?

8 Числа a_1, a_2, \dots, a_n целые. Докажите, что произведение $(a_1^2 + 1)(a_2^2 + 1) \dots (a_n^2 + 1)$ можно представить в виде суммы двух квадратов.

9 Шли сорок мышей, несли сорок грошей.

Две мыши поплоше несли по два гроша,

Немало мышей — вообще без грошей,

Большие совсем тащили по семь,

А остальные несли по четыре.

Сколько мышей шли без грошей?

8ВМ, спецкурс, занятие 10

21 октября 2022

Разнобой

1 В купе поезда собрались десять мудрецов. Окно было открыто, и когда поезд въехал в туннель, в него влетело облако сажи и перепачкало лица семи мудрецам. Поезд выехал из тоннеля, и все увидели испачканные лица других, но были слишком тактичны, чтобы сказать об этом. Грязь же на своем лице никто не почувствовал, и все продолжали считать себя чистыми.

В купе вошел проводник и сказал: «Господа, у некоторых из вас перепачканы лица. На каждой станции поезд стоит достаточно долго, так что испачкавшиеся могут выйти и умыться». Несколько станций никто из мудрецов не реагировал, а потом вдруг все грязные встали и пошли умываться. На какой станции это произошло?

Подсказка: разберите сначала случай, когда был один испачканный мудрец. Потом когда два, и так далее.

2 Город окружен кольцевой дорогой с односторонним движением. Также в городе есть несколько проспектов с односторонним движением, которые начинаются и заканчиваются на кольцевой дороге. Эти проспекты разбивают город на кварталы. Докажите, что вокруг какого-то из этих кварталов можно объехать, не нарушая правил дорожного движения.

3 Докажите, что найдутся две степени двойки, разность которых делится на 1543.

4 Найдите все натуральные решения уравнения $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{25}$.

5 Перед боем с белогвардейцами у Василия Ивановича и Петьки было поровну патронов. Василий Иванович израсходовал в бою в 8 раз меньше патронов, чем Петька, а осталось у него в 9 раз больше патронов, чем у Петьки. Докажите, что изначально количество патронов у Василия Ивановича делилось на 71.

6 Программист Вася написал программу, которая находит НОК всех чисел от 1 до 100. Хакер Петя стер часть кода, и теперь программа находит НОК чисел от 51 до 100. Как изменится ответ?

7 Филателист Андрей решил разложить все свои марки поровну в 3 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок. Сколько всего марок у Андрея, если известно, что недавно он купил для них дополнительный альбом, вмещающий 150 марок, так как такого же старого альбома уже не хватало?

8 Числа a_1, a_2, \dots, a_n целые. Докажите, что произведение $(a_1^2 + 1)(a_2^2 + 1) \dots (a_n^2 + 1)$ можно представить в виде суммы двух квадратов.

9 Шли сорок мышей, несли сорок грошей.

Две мыши поплоше несли по два гроша,

Немало мышей — вообще без грошей,

Большие совсем тащили по семь,

А остальные несли по четыре.

Сколько мышей шли без грошей?