

## Алгебра, геометрия и последовательности

**0** Вспомните геометрическое доказательство формул сокращенного умножения:

$$\begin{array}{ll} \boxed{\text{a}} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; & \boxed{\text{b}} (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \\ \boxed{\text{c}} a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); & \boxed{\text{d}} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 = ? \end{array}$$

**1** Назовем  $n$ -ным **треугольным числом**  $T_n$  количество клеток в ступенчатом треугольнике со стороной в  $n$  клеток (рис. 1).

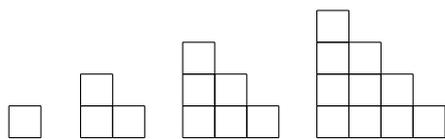


Рис.1

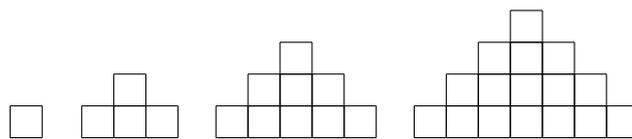


Рис.2

**a** Выпишите

$$T_1 + T_2, \quad T_2 + T_3, \quad T_3 + T_4, \dots$$

Какая последовательность получилась? Объясните получившийся результат геометрически.

**b** Докажите формулу Диофанта:

$$8T_n + 1 = (2n + 1)^2.$$

**c** Докажите тождество:  $T_{n+m} = T_n + T_m + nm$ .

**2** Рассмотрим симметричные треугольники (рис. 2).

**a** Выпишите площади этих треугольников в виде ряда. Объясните геометрически получившийся результат.

**b** Какая сумма соответствует способу разрезания такого треугольника на горизонтальные слои?

**3** Придумайте формулу для вычисления суммы нечетных чисел через одно:

$$1 + 5 + 9 + 13 + \dots = ?$$

**4\*** Докажите, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

Подсказка: разрежьте таблицу умножения на части.

**5** Найдите пятисотое натуральное число, дающее при делении на 3 остаток 1.

**6** Кусок бумаги рвут на 6 частей. Некоторые из получившихся частей снова рвут на 6 частей и так далее. Может ли получиться 2022 куска?

**7** Два рыбака год были на рыбалке. Первый каждый день вылавливал одну рыбу, второй ловил каждый день вдвое больше рыб, чем они вместе накануне. В первый день они поймали на двоих всего одну рыбу. Сколько рыб они поймали в последний день рыбалки?

**8** (письменно, дома) Вычислите. Для этого выпишите суммы двух, трех, четырех слагаемых и попробуйте угадать ответ.

**a** (разбор)  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = ?$

**b**  $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{1541 \cdot 1543} = ?$

**c**  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = ?$

**d**  $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{3^n} = ?$

**e**  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = ?$

**f**  $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{(n-1)}{n!} = ?$

**g**  $1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = ?$

**h**  $1 + 3 + 9 + \dots + 3^n = ?$