Геометрия, 8В, домашнее задание 17 $\longrightarrow$ 22 марта.

$\boxed{1.}$ Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через точку A, пересекает окружности в точках M и N, отличных от A, а параллельная ей прямая, проходящая через B, – соответственно в точках P и Q, отличных от B. Докажите, что $MN = PQ$.

$\boxed{2.}$ На стороне BC равностороннего треугольника ABC выбрана точка D, а вне треугольника — точка E так, что треугольник DCE также равносторонний. Докажите, что общая точка описанных окружностей этих равносторонних треугольников (отличная от C) лежит на отрезке BE.

$\boxed{3.}$ $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник, $AB = BC$ и $AD = DC$. На диагонали AC нашлась такая точка K, что $AK = BK$ и четырёхугольник $KBCD$ вписанный. Докажите, что $BD = CD$.

$\boxed{4.}$ Четыре прямые пересекаются в шести точках. Четыре из этих точек можно рассматривать как вершины выпуклого четырёхугольника (допустим, $ABCD$), а две оставшиеся (скажем, P и Q) – как точки пересечения продолжений его противоположных сторон. Докажите, что точка Микеля M этой четвёрки прямых лежит на PQ если и только если $ABCD$ вписан.

$\boxed{5.}$ Две окружности пересекаются в точках A и B. Через A проводится произвольная прямая, пересекающая окружности в точках M и N. Докажите, что $\angle MBN$ не зависит от выбора прямой.

$\boxed{6.}$ Точка I — инцентр треугольника ABC. На продолжении стороны AC за точку A отметили точку D так, что $AD + AB = BC$. Докажите, что $DI = CI$.

$\boxed{7.}$ В треугольнике ABC $\angle B > 90^\circ$. Касательные к его описанной окружности в точках A и B пересекаются в точке P. Перпендикуляр к BC, проведённый в точке B, пересекает прямую AC в точке K. Докажите, что $PA = PK$.

$\boxed{8.}$ Дан треугольник ABC, AC – его наибольшая сторона. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяты точки C_1 и A_1 соответственно так, что $AC = A_1C = AC_1$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABA_1 и CBC_1 пересекаются на биссектрисе угла B.