8 математический класс 1543. Алгебра. 11 февраля 2023.

1 Решите уравнения

a $|1-x|+|4x+2|-|3x-5|=2$; b $2x-|x-|3x+8||=5+x$.

Геометрический смысл модуля: $|x|$ — это расстояние от x до 0. А $|x-a|$ — это расстояние от x до a.

2 Решите уравнения и неравенства устно (используя только картинку числовой прямой):

a $|x|<1$; b $|x-5|=4$; c $|x+3|\le 1$; d $|x+2|\ge 5$;
e $|x+1|+|x-2|=2$; f $|x+1|+|x-2|=3$; g $|x+1|+|x-2|=5$;
h $|x+1|+|x-2|>5$; i $|x+1|+|x-2|\le 3$; j $|x-4|<|x-9|$;
k $|x-4|-|x-9|=5$; l $|x-4|-|x-9|=-3$; m $|x-4|-|x-9|\ge 11$;

В общем случае, неравенства с модулями так же, как и уравнения, решаются разбором случаев. Иногда этот перебор можно упростить.

$$|f(x)|\le a \Leftrightarrow \begin{array}{c} -a\le f(x)\le a \text{ при } a\ge 0 \\ \text{нет решений при } a<0 \end{array} \qquad |f(x)|\ge a \Leftrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{l} f(x)\ge a \\ f(x)\le -a \end{array}\right. \text{ при } a\ge 0 \\ f(x) \text{ определено при } a<0 \end{array}$$

На самом деле, проверять знак a не обязательно, но без этого легко запутаться. Можно доказать такие же утверждения и для случая, когда правая часть неравенства зависит от x.

$$|f(x)|\le g(x) \Leftrightarrow -g(x)\le f(x)\le g(x) \qquad |f(x)|\ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)\ge g(x) \\ f(x)\le -g(x) \end{array}\right.$$

3 Решите неравенства:

a $|3-2x|<7$; b $|3x-4|\ge 11$ c $|2x^2-5x+3|\le 0$; d $|3x^2-8x-3|>0$;
e $||x-4|-2|<3$; f $||3x-4|-5|\ge 1$; g $|2x+5|<x+4$; h $|x+2|-|x-3|\ge 2x-1$.

4 Постройте графики функций:

a $y=|x|+x$; b $y=|x-2|+|2x+4|-x-1$; c $y=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$.

5 Решите системы:

a $\begin{cases} |x-3|<5 \\ |x-2|\ge 1 \end{cases}$ b $\begin{cases} 3-2x<2-x \\ -6\ge -3x \\ 3x-2\ge 5x-9 \\ |x-4|<1 \end{cases}$ c $\begin{cases} 2x-1>x+2 \\ \dfrac{x}{2}-3<\dfrac{x-1}{3} \\ |x-3|+|x-16|<15 \end{cases}$

6* Решите уравнение

$$|x|+|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-99|=2500.$$

Домашнее задание. 11 февраля → 16 февраля

1 Используя геометрический смысл модуля, решите уравнения и неравенства:

a $3\le |x-1|<5$; b $|x+2|\ge |x-7|$; c $|x+5|+|x-7|=20$;
d $|x+3|+|x+5|<2$; e $|x-4|-|x-10|\le 2$.

2 Решите:

a $||3-x|-x+1|+x=6$; b $|x-3|-|2x+7|>4x$; c $\begin{cases} 3x-2<x+6 \\ 3-2x>\dfrac{x}{2}-4 \\ |x-7|+|x-9|<15 \end{cases}$.

3 Решите уравнение $|6+3x|-|x+4|=2-x$ графически, построив графики функций $y=|6+3x|-|x+4|$ и $y=2-x$ в одной системе координат.

8 математический класс 1543. Алгебра. 16 февраля 2023.

1 Решите:

a $|x^2+2x-4|=1-2x$; b $2x-|x-|3x+8||=5+x$. c $6|x+1|-3|x-2|<5x+4$.

2 Постройте графики функций:

a $y=|2-x|-|2+x|$; b $y=\sqrt{x^2+6x+9}-2\sqrt{x^2-2x+1}+2$; c $y=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$.

3 Докажите **неравенство треугольника**: $|x|-|y|\le|x+y|\le|x|+|y|$.

4 Докажите, что $|x_1+x_2+\ldots+x_n|\le|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$.

5 Докажите, пользуясь неравенством треугольника:

a $|x-3|+|7-x|\ge 4$; b $|x+15|+|x-43|\ge 58$; c $|x+20|-|x+23|\le 3$;

6 При каких значениях a

a из неравенства $|x-4|<a$ следует неравенство $-2<x<12$;

b из неравенства $-2<x<12$ следует неравенство $|x-4|<a$?

7 Решите системы:

a $\begin{cases}3-2x<2-x\\ -6\ge -3x\\ 3x-2\ge 5x-9\\ |x-4|<1\end{cases}$ b $\begin{cases}|x-1|<2x+5\\ |x-5|+|x-6|+|x-7|>9\end{cases}$ c $\begin{cases}|2x-1|<8\\ \dfrac{x+3}{x-5}\le 0\end{cases}$ d $\begin{cases}|x-2|<5-x\\ \dfrac{2x+9}{x+6}\ge 1\end{cases}$

8* Докажите неравенство $|x|+|y|+|z|\le|x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|$.

8 математический класс 1543. Алгебра. 16 февраля 2023.

1 Решите:

a $|x^2+2x-4|=1-2x$; b $2x-|x-|3x+8||=5+x$. c $6|x+1|-3|x-2|<5x+4$.

2 Постройте графики функций:

a $y=|2-x|-|2+x|$; b $y=\sqrt{x^2+6x+9}-2\sqrt{x^2-2x+1}+2$; c $y=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$.

3 Докажите **неравенство треугольника**: $|x|-|y|\le|x+y|\le|x|+|y|$.

4 Докажите, что $|x_1+x_2+\ldots+x_n|\le|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$.

5 Докажите, пользуясь неравенством треугольника:

a $|x-3|+|7-x|\ge 4$; b $|x+15|+|x-43|\ge 58$; c $|x+20|-|x+23|\le 3$;

6 При каких значениях a

a из неравенства $|x-4|<a$ следует неравенство $-2<x<12$;

b из неравенства $-2<x<12$ следует неравенство $|x-4|<a$?

7 Решите системы:

a $\begin{cases}3-2x<2-x\\ -6\ge -3x\\ 3x-2\ge 5x-9\\ |x-4|<1\end{cases}$ b $\begin{cases}|x-1|<2x+5\\ |x-5|+|x-6|+|x-7|>9\end{cases}$ c $\begin{cases}|2x-1|<8\\ \dfrac{x+3}{x-5}\le 0\end{cases}$ d $\begin{cases}|x-2|<5-x\\ \dfrac{2x+9}{x+6}\ge 1\end{cases}$

8* Докажите неравенство $|x|+|y|+|z|\le|x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|$.