8 математический класс 1543. Алгебра. 9 февраля 2023.

1 Известно, что $ab=8$, $a>0$. Найдите наименьшее значение выражения $2a+b$.

2 Известно, что $3x+4y=12$, x, $y>0$. Найдите наибольшее значение выражения xy.

3 Найдите наименьшее значение выражений a) $x+\dfrac{81}{x}$ при $x>0$; b) $\dfrac{4b^2-7b+25}{b}$ при $b>0$.

4 Докажите **неравенство о трех квадратах**: $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ для любых значений переменных. Когда достигается равенство?

5 Докажите неравенства:

a) $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$; b) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2+\left(\dfrac{c}{a}\right)^2 \geq \dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}$;

c) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^4+\left(\dfrac{b}{c}\right)^4+\left(\dfrac{c}{a}\right)^4 \geqslant \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}$; d) $\dfrac{a^3}{bc}+\dfrac{b^3}{ac}+\dfrac{c^3}{ab} \geq a+b+c$ при a, b, $c>0$.

Модуль раскрывается следующим образом:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

В общем случае, для решения уравнений с модулями необходимо разобрать все возможные случаи, как может раскрываться каждый из модулей, и решить получившиеся системы уравнений и неравенств.

$$|x-2|+2|x+1|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-1 \\ -(x-2)-2(x+1)=5 \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ -(x-2)+2(x+1)=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ (x-2)+2(x+1)=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-1 \\ x=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ x=\dfrac{5}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{5}{3}, 1\right\}$$

В некоторых случаях эти системы можно упростить:

$$|f(x)|=a \Leftrightarrow \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x)=a \\ f(x)=-a \end{array}\right. \text{ при } a \geq 0 \\ \text{нет решений при } a<0 \end{array}$$

$$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \qquad |f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

6 Решите уравнения с модулями:

a) $|1-3x|=7$; b) $|2x-11|=\sqrt{17}-\sqrt{5}-2$; c) $|x+3|=|2x^2+x-5|$;

d) $|x-1|=4x-3$; e) $|x^2+x-3|=x$; f) $x^2-4x\cdot\dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}+2=0$;

g) $|x-2|+|x-4|=3$; h) $|5x-2|-|7x-3|+2x=1$; i) $\dfrac{|x-2|}{|x-1|-1}=1$.

7* Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2+b^2+2c^2}+\frac{1}{b^2+c^2+2a^2}+\frac{1}{c^2+a^2+2b^2} \leq \frac{1}{a^2+b^2+2ab}+\frac{1}{b^2+c^2+2bc}+\frac{1}{c^2+a^2+2ca}.$$

Домашнее задание. 9 февраля → 11 февраля

1 Найдите наименьшее значение выражения $3z+2t$, если известно, что $zt=6$, $z>0$.

2 Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{(x+3)(x+12)}{x}$ при $x>0$.

3 Докажите неравенства:

a) $\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq \dfrac{ab+ac+bc}{3}$; b) $\left(\dfrac{bc}{a}\right)^4+\left(\dfrac{ac}{b}\right)^4+\left(\dfrac{ab}{c}\right)^4 \geq a^2bc+b^2ac+c^2ab$.

4 Решите уравнения с модулями:

a) $|x^2-x-8|=-x$; b) $|x+5|+|x-1|=6$; c) $|5-2x|+|x+7|-3x=6$.