

## 8 математический класс 1543. Алгебра. 4 февраля 2023.

**1** Докажите **неравенство о средних**: среднее арифметическое двух неотрицательных чисел  $a$  и  $b$  не меньше их среднего геометрического (то есть  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  при  $a, b \geq 0$ ). Когда достигается равенство?

**2** Докажите неравенства:

**a**  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  при  $x > 0$ ;    **b**  $\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}} > 2$ ;    **c**  $\frac{a+4}{2} + \frac{a+9}{2} > 5\sqrt{a}$ ;

**d**  $\frac{a+c}{2} + \frac{b+d}{2} \geq \sqrt{(a+b)(c+d)}$  при  $a, b, c, d \geq 0$ ;    **e**  $\frac{ac^2+b}{c} \geq 2\sqrt{ab}$  при  $a, b \geq 0, c > 0$ ;

**f**  $(a+1)(b+1)(ab+1) \geq 8ab$  при  $a, b \geq 0$ . Когда достигается равенство?

**3** Известно, что  $\frac{ab}{3} = \frac{3}{c}$ . Докажите, что  $(1+a)(1+b)(1+c) > 24$ .

**4** Для  $a > 0$  докажите неравенства:

**a**  $a^4 + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} \geq 4$ ;    **b**  $\frac{a+4}{2} + \frac{a+2}{4} + \frac{6}{a} > 6,5$ .

**5** Докажите, что    **a**  $\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd$ ;    **b\***  $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$ .

### Домашнее задание. 4 февраля → 9 февраля

**1** Докажите неравенства:

**a**  $b(a^2+1) + a(b^2+1) \geq 4ab$  при  $a, b \geq 0$ ;    **b**  $\left(1 + \frac{a^2}{bc}\right) \left(1 + \frac{b^2}{ac}\right) \left(1 + \frac{c^2}{ab}\right) \geq 8$  при  $a, b, c > 0$ ;

**c**  $a^{10} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{a} \geq 8$  при  $a > 0$ . Когда достигается равенство?

**2** Решите неравенства

**a**  $\frac{(3x-7)(3x-2)}{3} - \frac{(8x-19)(x+1)}{4} \leq \frac{(6x-7)(2x-5)}{12}$ ;    **b**  $(4x^2+4x+1)(3x-5)^2(x+7) > 0$ .

**3** Решите систему 
$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 8 \\ x < 2 \end{cases} \\ x > -1 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

**4** При каких значениях  $a$  уравнение  $x^2 - (a-2)x - 2 - 3a = 0$  имеет корни  $x_1$  и  $x_2$  такие, что  $x_1 < 0, x_2 > 0, |x_1| > x_2$ ?